Hoàng Thắng Lợi

SỨC BỀN VẬT LIỆU

Tập I

Chương 1
MỞ ĐẦU

§1 NHIỆM VỤ VÀ ĐỐI TƯỢNG CỦA MÔN SỨC BỀN VẬT LIỆU

I. Nhiệm vụ môn học.

Để giữ nguyên hình dạng và kích thước ban đầu, mọi vật thể rắn đều bao gồm hai thuộc tính cơ bản là tính hèn và tính cứng. Nhờ hai tính chất đó, khi ngoại lực tác dụng vào vật còn chưa vượt quá một trị số xác định, vật đó vẫn chưa bị phá huỷ và không bị thay đổi một cách đáng kể kích thước hình học ban đầu.

"Sức bền vật liệu là khoa học nghiên cứu về độ bền, độ cứng và sự ổn định của công trình hay chi tiết máy dưới tác dụng của ngoại lực".

+ Độ bền của công trình hay chi tiết máy là khả năng làm việc lâu dài mà không bị nứt vỡ, không bị phá huỷ khi ngoại lực tác dụng chưa vượt quá trị số quy định của người thiết kế.

+ Độ cứng của công trình gọi là được bảo đảm nếu các biến dạng của chúng không lớn đến mức làm ảnh hưởng đến sự làm việc bình thường của công trình. Ở đây biến dạng chính tà sự thay đổi hình dạng và kích thước lan đầu

+ Sự ổn định của công trình hay chi tiết máy được bảo đảm nếu chúng không chí những dịch chuyển hình học với tổng thể kết cấu, không có những dao động riêng có thể cộng hưởng với dao động bên ngoài.

Nhằm thực hiện từ yêu cầu đó sức bật vật liệu sẽ xoay quanh ba bài toán cơ bản:

a) Kiểm tra sự làm việc của công trình dưới tác dụng của ngoại lực (kiểm tra điều kiện bền và cứng)

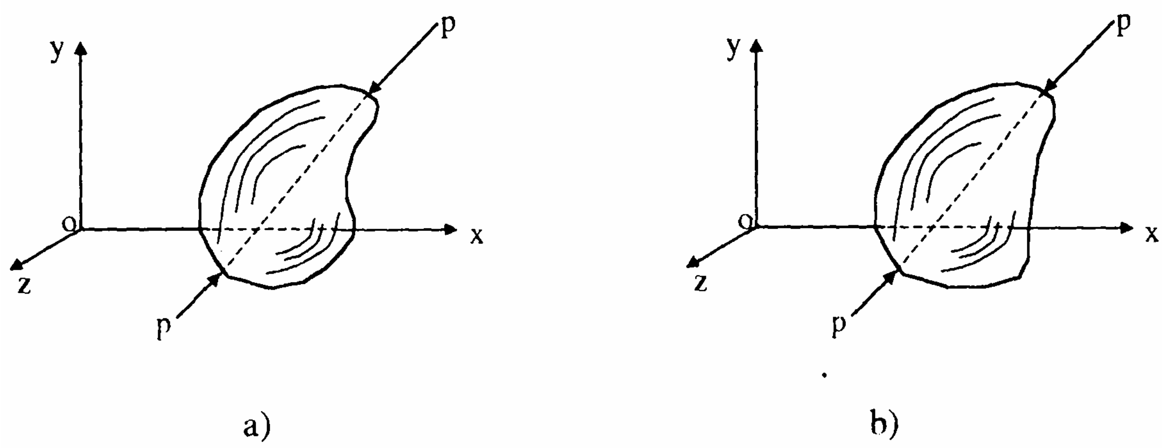
b) Xác định kích thước công trình hay chi tiết máy.

c) Xác định trị số lực lớn nhất có thể đặt lên công trình

II. Đối tượng nghiên cứu của môn học

<u>1. Vật rắn thức và tính đàn hồi.</u>

Sức bền vặt liệu nghiên cứu các vật thể rắn lực là những vật thể bị biến dạng dưới tác dụng của ngại lực. Khác với cơ học lý thuyết nghiên cứu chuyển động của các vật rắn nên đã coi các vật thể là rắn tuyệt đối. Chính vì vậy khi trượt lực trên đường tác dụng của chúng, ý nghĩa của bài toán vẫn không thay đổi. Cơ lý thuyết xem hai bài toán mô tả trên hình 1.a và 1.b là như nhau nghĩa là vật thể đều ở trạng thái cân bằng.



Hình 1

Khi chú ý đến biến dạng của vật thể, trường hợp a) khoảng cách giữa các chất điểm theo phương của lực P sẽ giảm đi, còn trường hợp b) khoảng cách đó sẽ tăng lên, ý nghĩa của hai bài toán là khác nhau.

Một tính chất khác, ngược lại với tính biến dạng là tính đàn hồi, đó là khả năng khôi phục lại hình dạng và kích thước ban đầu sau khi đã bỏ ngoại lực tác dụng đi. Những vật thể có tính đàn hồi được gọi là vật thể đàn hồi. Những vật thể nào sau khi bỏ ngoại lực đi, khôi phục lại được hoàn toàn hình dạng và kích thước ban đầu được gọi là vật thể có tính đàn hồi tuyệt đối, còn nếu không khôi phục lại được hoàn toàn hình dạng và kích thước ban đầu. Ta nói vật thể có tính đàn hồi không tuyệt đối. Phần biến dạng còn lại được gọi là biến dạng dư hay bia dạng dẻo.

Rõ rằng với cách phân loại như vậy, tính đàn hồi của một loại vật thể nào đó sẽ phụ thuộc vào bản chất của vật liệu, trị số của ngoại lực tác dụng và hình dạng vật thể. Với đa số kim loại khi ngoại lực còn nhỏ thì tính đàn hồi là tuyệt đối nhưng khi ngoại lực đã vượt quá một trị số giới hạn nào đó thì tính đàn hồi lại là không tuyệt đối. Mặt khác với cùng một ngoại lực, tính luân hồi của một lò xo và một viên bị làm bằng cùng một loại vật liệu sẽ khác nhau. Giai đoạn mà tính đàn hồi của vật thể là đàn hồi tuyệt đối được gọi là giai đoạn đàn hồi, những biến dạng phát sinh trong giai đoạn này được gọi là biến dạng đàn hồi.

2- Hình dạng vật thể nghiên cứu:

Mặc dù các công trình hay chi tiết máy mà sức bền nghiên cứu có hình dạng rất khác nhau song đều có thể sắp xếp chúng vào một trong ba loại sau đây:

a) Khối. là những vật thể có kích thước theo ba phương trong hệ toạ độ để các tương đương như nhau. Ví dụ: các viên bi trụ, viên bi cầu trong ổ bi, đe thợ rèn...

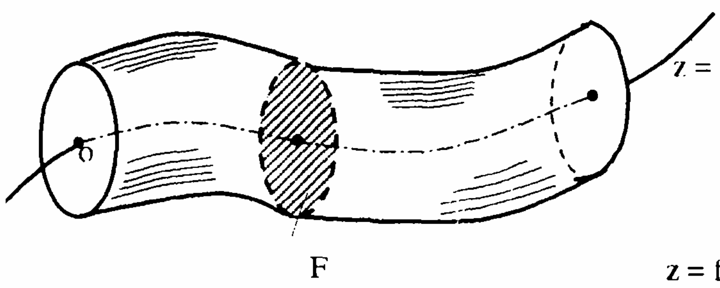
b) Tấm- Vỏ: là những vật thể có kích thước theo một phương nào đó nhỏ hơn nhiều so với hai phương còn lại. Ví dụ như cánh cửa, cánh quạt máy, tuốc bin, thùng đựng xăng, toa xe lửa...

c) Thanh: Là những vật thể có kích thước theo một phương lớn hơn nhiều so với hai phương còn lại. Đây là vật thể chủ yếu mà sức bền nghiên cứu cho nên ta sẽ đưa ra những định nghĩa cụ thể cho một thanh như sau:

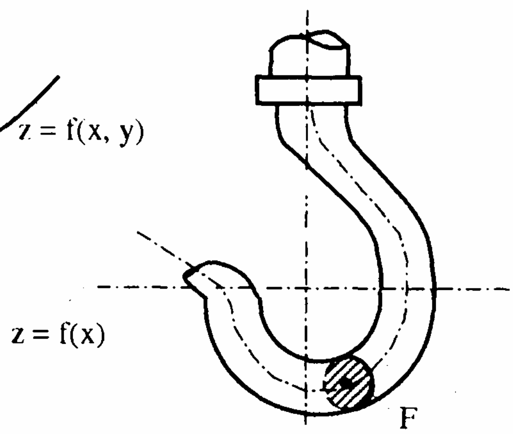
+ Cho một đường cong trong không gian, ba chiều z = f (x,y) và một diện tích F có trọng tâm là 0. Di chuyển diện tích F trong không gian sao cho trung tâm 0 luôn luôn nằm trên đường cong z và F luôn vuông góc với z. Hình khối mà diện tích F tạo nên khi di chuyển được gọi là thanh (hình 2).

+ Đường cong z được gọi là trục thanh và F được gọi là mặt cắt ngang của thanh. Nếu khi di chuyển diện tích F không thay đổi ta có thanh mặt cắt ngang không đổi. Còn nếu F thay đổi ta có thanh mặt cắt ngang thay đổi (hình 3)

+ Nếu đường cong z là hàm của một biến x hoặc y, nghĩa là một đường cong phẳng thì ta có thanh cong phẳng. Đặc biệt nếu z là hàm bậc nhất của x hoặc y ta có thanh thẳng.



Hình 2



Hình 3

§2- PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU MÔN SỨC BỀN VẬT LIỆU.

- Sức bền vật liệu nghiên cứu các vật thể rắn thực dưới tác dụng của ngoại lực vì vậy nó luôn luôn phải sử dụng những kiến thức của các môn học có liên quan như vật lý chất rắn, cơ học lý thuyết, v.v... Muốn một công trình hay chi tiết máy bảo đảm điều kiện bền thì giữa ngoại lực tác dụng và những lực phát sinh bên trong công trình phải cân bằng với nhau, đó chính là lý do cho phép sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học của cơ học lý thuyết. Mặt khác việc tính toán luôn luôn đòi hỏi phải sử dụng các kiến thức của toán học cao cấp. Đặc biệt là các khái niệm vi phân, tích phân, đạo hàm riêng, v.v... Song song với việc tính toán lý thuyết, sức bền còn là một khoa học thực nghiệm, nhiều trường hợp thực nghiệm chỉ ra phương hướng xây dựng các công thức lý thuyết. Đồng thời nó cũng kiểm tra sự đúng đắn của lý thuyết trước khi áp dụng trong thực tế.

I. Sơ đồ tính sức bền vật liệu.

Sự làm việc bình thường của một công trình hay chi tiết máy phụ thuộc đồng thời vào nhiều yếu tố như tính chất của vật liệu, ngoại lực tác dụng nhiệt độ hình dạng chi tiết, v.v... Khi giải một bài toán sức bền không thể cùng một lúc chú ý đến các yếu tố đó, vì vậy người ta phải giải bài toán thực tế thông qua sơ đồ tính sức bền.

*Định nghĩa: "S*ơ đồ tính sức bền vật liệu là mô hình của một bài toán thực tế sau khi đã bỏ bớt đi những yếu tố không cơ bản và có thể giải bài toán đó bằng các phương pháp của sức bền".

- Cùng một bài toán thực tế, có thể sẽ đưa về được nhiều sơ đổ tính khác nhau tuỳ theo quan điểm của người tính toán và ngược lại một sơ đồ tính có thể sẽ tương ứng với nhiều bài toán thực ít khác nhau. Trách nhiệm của người thiết kế là phải chọn sơ đồ tính sao cho phù hợp nhất với bài toán thực tế nhưng tính toán lại đơn giản nhất. Sơ đồ tính bao gồm nhiều bước khác nhau gọi là sơ đồ hoá. Dưới đây là một số phép sơ đồ hoá cơ bản:

1. Sơ đồ hoá tính chất vật liệu:

"Vật liệu được xem là liên tục, đồng chất và đẳng hướng".

+ Coi vật liệu có tính liên tục tức là coi rằng mật độ vật liệu là dày đặc trong toàn bộ thể tích khoảng cách giữa các nguyên tử là bằng không. Thực ra khi khảo sát cấu trúc tế vi của vật liệu thì không thể xem là vật liệu phân bố liên tục, nhưng sức bền thường khảo sát sự cân bằng của một phần vật thể hoặc một phân tố hình hộp tách ra từ vật thể. Trong trường hợp này khoảng cách giữa các nguyên tử là không đáng kể và có thể bỏ qua. Giả thuyết này cho phép ta sử dụng được các phép tính đạo hàm, tích phân của toán học cao cấp

+ Tính đồng chất ở đây được hiểu là tính chất cơ lý của vật liệu tại mọi điểm bên trong thể tích là như nhau. Tính chất này khá phù hợp với các kim loại là loại vật liệu có cấu trúc mạng tinh thể. Tuy nhiên nếu khoảng cách giữa các nút mạng thay đồi thì tính đồng chất sẽ không phù hợp nữa. Tính chất này cho phép khảo sát vật thể thông qua việc khảo sát một vài điểm đặc biệt bên trong vật thể đó, bài toán nhờ vậy sẽ đơn giản đi rất nhiều.

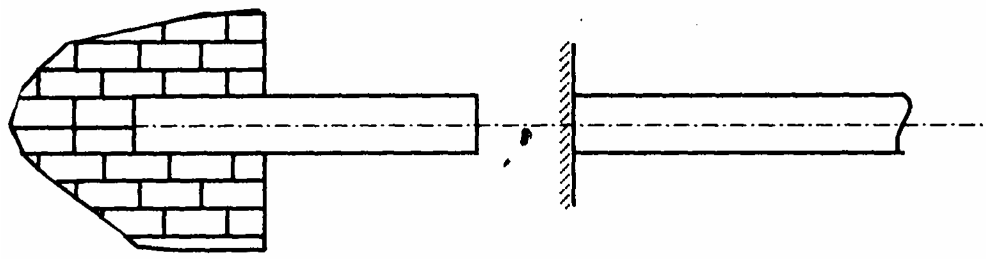
+ Giả thiết vật liệu có tính đẳng hướng tức là xem rằng khả năng chịu lực của vật liệu theo mọi phương là như nhau. Đối với một số vật liệu tự nhiên như gỗ, tre,... khả năng chịu lực theo dọc thớ và ngang thứ là khác nhau do đó chúng không có tính đẳng hướng. Với từng tinh thể riêng rẽ cũng vậy, chúng không có tính đẳng hướng song khi chúng sắp xếp hỗn loạn trong một vật thể thì sẽ có sự bù trừ cho nhau và làm cho vật liệu có tính đẳng hướng.

2- Sơ đồ hoá liên kết.

Trong không gian ba chiều một vật thể sẽ có sáu khả năng dịch chuyển: ba chuyển động thẳng theo các phương x, y, z và ba chuyển động quay quanh các trục x, y, z đó. Ta nói vật thể có sáu bậc tự do. Trong không gian hai chiều tức là trong mặt phẳng, vật thể chỉ còn lại ba bậc tự do.

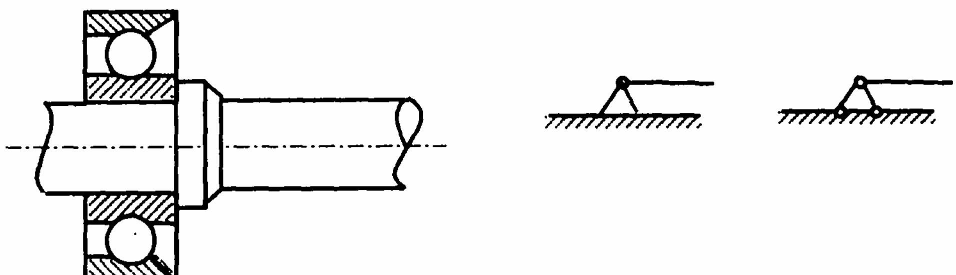
Liên kết đó là một bộ phận của công trình có tác dụng hạn chế bớt số bậc tự đo của vật thể hoặc của hệ. Liên kết giữa các công trình với nhau hoặc giữa công trình với mặt đất được gọi là liên kết ngoại, còn liên kết giữa các bộ phận trong một công trình được gọi là liên kết nội. Dưới đây sẽ đưa ra ba loại liên kết cơ bản là ngàm, gối cố định và gối di động.

+ Ngàm: Là loại liên kết hạn chế hoàn toàn sáu bậc tự do của hệ. Ví dụ liên kết giữa chân cột và mặt đất, liên kết giữa các dầm đỡ hành lang với tường nhà, v.v... ký hiệu ngàm chỉ ra trên hình 4.



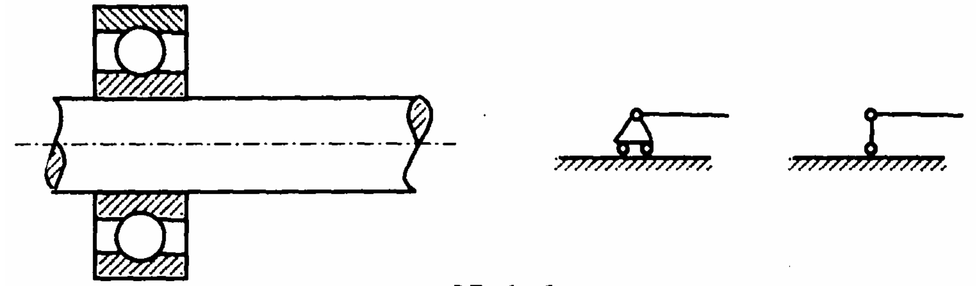
Hình 4: Ngàm cứng

+ Gối cố định: Là loại liên kết hạn chế hai dịch chuyển thẳng (trong không gian hai chiều) và 3 dịch chuyển thẳng (trong không gian ba chiều). Ví dụ: như các ụ con lăn cố định dưới các nhịp cầu, các ổ bi đỡ chặn trong máy công cụ, v.v... Ký hiệu gối cố định chỉ ra trên hình 5.



Hình 5

+ Gối di động: Đây là một loại liên kết đơn, trong mặt phẳng nó chỉ hạn chế một dịch chuyển thẳng. Các liên kết thực tế như ổ bi đỡ lòng cầu, ụ con lăn di động, v.v... Khi sơ đồ hoá đều đưa về dạng gối này (hình 6).



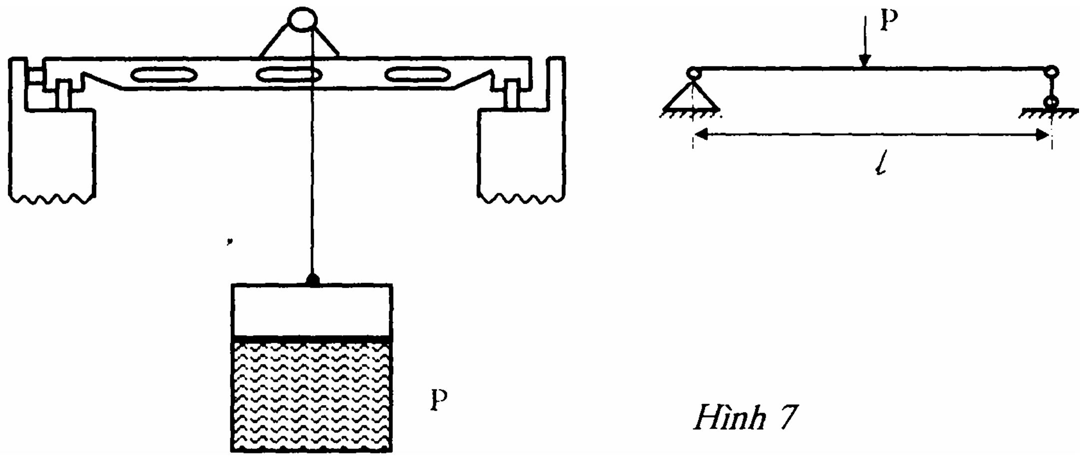
Hình 6

3 - Sơ đồ hoá kích thước hình học:

Đây là quế trình chuyển đổi các vật thể từ thực tế về một trong ba dạng đã biết là khối, tấm, vỏ, thanh. Đối với các dầm đệm như xà nhà, vì kèo,... *H*oặc dầm ghép như nhịp cầu,... khi sơ đồ hoá về dạng thanh người ta thường biểu diễn bằng đường trục của nó. Với các trục bậc trong máy công cụ, người ta thường sơ đồ hoá nó thành một thanh có độ cứng thay đổi; các bánh răng được biểu diễn dưới dạng một (ra tròn, v.v... Trong trường hợp sau khi sơ đồ hoá ta nhận được các vật thể có dạng tấm hoặc vỏ thì bài toán giải quyết sẽ thuộc về một môn học khác đó là lý thuyết về tám mỏng và vỏ mỏng. Tuy vậy cũng cần phải chú ý rằng không phải trường hợp nào cũng có thể sơ đồ hoá về dạng thanh là dạng chủ yếu mà sức bền nghiên cứu nhưng không vì thế mà bài toán sức bền sẽ mất đi tính tổng quát của nó.

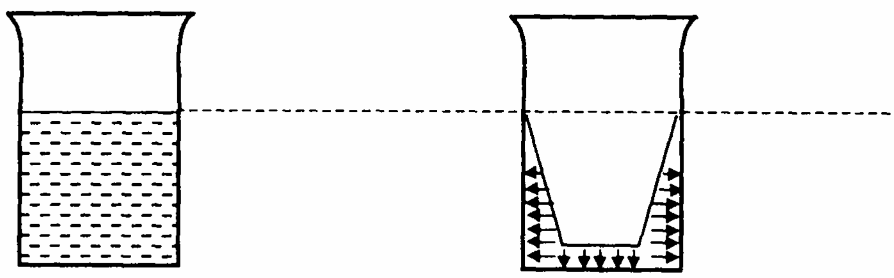
4- Sơ đồ hoá ngoại lực:

Trong tất cả mọi trường hợp, ngoại lực tác dụng lên công trình hay tiết máy đều là những lực đặt lên một phần hoặc toàn bộ diện tích bề mặt, hoặc tác dụng trong toàn bộ thể tích. Tuy nhiên nếu diện tích đặt lực là quá nhỏ so với toàn bộ bề mặt công trình thì người ta có thể xem như lực đặt tại một điểm, đó là lực tập trung. Trên hình 7, trọng lượng của vật nâng tác dụng lên cần trục có thể xem là một lực tác dụng vì diện tích đặt lực là rất nhỏ.



Hình 7

Khi khảo sát áp lực của chất lỏng tác dụng lên bình chứa. Ngoại lực (tức là áp lực chất lỏng sẽ được sơ đồ hoá thành một hệ lực phân bố như trên hình 8.



Hình 8

Sơ đồ hoá ngoại lực không phải là bước phân loại ngoại lực mà là bước thay thế tác dụng tương hỗ giữa các phần vật thể với nhau bằng các lực mà không làm thay đổi tình trạng làm việc của chúng.

II. Các giả thuyết.

1- Giả thuyết 1:

"Tính đàn hồi của vật liệu được xem là đàn hồi tuyệt đối và vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi".

Giả thuyết này chỉ rõ sức bền vật liệu chỉ nghiên cứu bài toán trong giai đoạn đàn hồi. Ngoài miền đàn hồi bài toán sẽ được nghiên cứu trong một môn học khác là lý thuyết dẻo.

2- Giả thuyết 2:

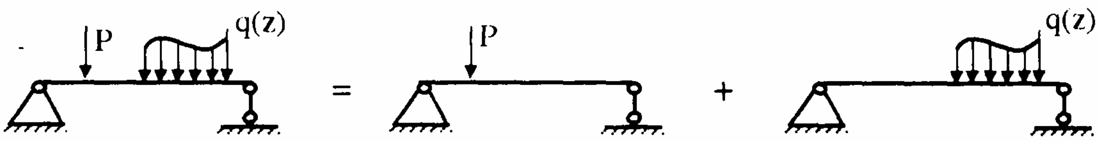
Biến dạng của vật thể do ngoại lực gây nên được xem là bé (so với kích thước vật thể).

Với giả thuyết này ta có thể xem như điểm đặt của lực là không thay đổi đồng thời có thể áp dụng nguyên tắc gạt bỏ vô cùng bé bậc cao đối với biến dạng.

III. Các nguyên lý.

1. Nguyên lý cộng tác dụng

Nếu một hệ chịu tác dụng đồng thời của nhiều yếu tố thì có thể khảo sát hệ đó dưới tác dụng của từng yếu tố riêng rẽ rồi cộng các kết quả lại (hình 9).



Hình 9

Nếu vật liệu làm việc ngoài miền đàn hồi thì nguyên lý trên không được áp dụng vì sai số âm. Các yếu tố tác dụng lên hề có thể bao gồm cả ngoại lực lẫn các tác nhân khác như nhiệt độ, áp suất, v.v...

2- Các nguyên lý khác:

Ngoài nguyên lý cộng tác dụng sức bền còn sử dụng các nguyên lý bảo toàn công, bảo toàn năng lượng,... của vật lý; nguyên lý Đa lăm be (lý thuyết, nội dung các nguyên lý này đã được trình bày trong các giáo trình, ở đây không nhắc lại nữa).

§3- NGOẠI LỰC VÀ NỘI LỰC

I. Ngoại lực.

Định nghĩa: "Ngoại lực là những lực từ bên ngoài hay từ vật thể khác tác dụng lên vật thể ta đang khảo sát".

Ngoại lực bao gồm hai loại là tải trọng và phản lực liên kết. Trong đó tải trọng là lực tác dụng lên vật thể mà trị số, điểm đặt, phương chiều và tính chất đã biết trước. Phản lực liên kết là những lực phát sinh ra tại các vị trí liên kết và ta mới chỉ biết điểm đặt của nó.

1. Phân loại ngoại lực:

Ngoại lực được phân bố thành ba loại là lực tập trung, lực phân bố bề mặt và lực phân bố thể tích.

+ *Lực tập chung*. là lực tác dụng trên một diện tích rất nhỏ và có thể thay thế bằng hợp lực của chúng. lực này có thứ nguyên là [lực] và đơn vị là N,

+ *Lực phân bố bề mặt*. là lực tác dụng trên một phần hoặc toàn bộ bề mặt vật thể khảo sát. Trường hợp đặc biệt khi bề mặt có đặt lực biến thành một đường thì lực tác dụng gọi là lực phân bố theo chiều dài.

+ *Lực phân bố thể tích*. là những lực tác dụng trên một phần hoặc toàn bộ thể tích vật thể khảo sát.

+ *Cường độ của lực phân bố*. là giá trị của lực phân bố trên một đơn vị thể tích hoặc diện tích. Thứ nguyên của cường độ lực bề mặt là: $\left(\dfrac{\text{Lực}}{(\text{Chiều dài})^2}\right)$ thứ nguyên của cường độ lực phân bố thể tích là $\left(\dfrac{\text{Lực}}{(\text{Chiều dài})^3}\right)$ và của lực phân bố chiều dài ℓ à $\left(\dfrac{\text{Lực}}{(\text{Chiều dài})}\right)$

2- Phân loại tải trong.

Tải trọng được phân thành tải trọng tĩnh và tải trọng động.

+ Tải trọng tĩnh là tải trọng mà giá trị của nó tăng dần từ không đến một trị số xác định trong quá trình đó gia tốc chuyển động của các chất điểm là không đáng kể và có thể bỏ qua.

+ Tải trọng động là tải trọng tác dụng lên hệ làm cho các chất điểm của hệ chuyển động có gia tốc hoặc có xuất hiện lực quán tính.

- Tải trọng động mà trị số thay đổi rất nhanh trong một khoảng thời gian nhỏ được gọi là tải trọng va chạm.

- Tải trọng mà phương chiều, độ lớn đã biết còn điểm đặt. Thay đổi được gọi là tải trọng di động. Ví dụ: Trọng lượng mô khi chạy tác dụng lên cầu.

- Tải trọng biến thiên tuần hoàn theo thời gian là tải trọng gậy nên dao động.

II. Nội lực phương pháp mặt cắt.

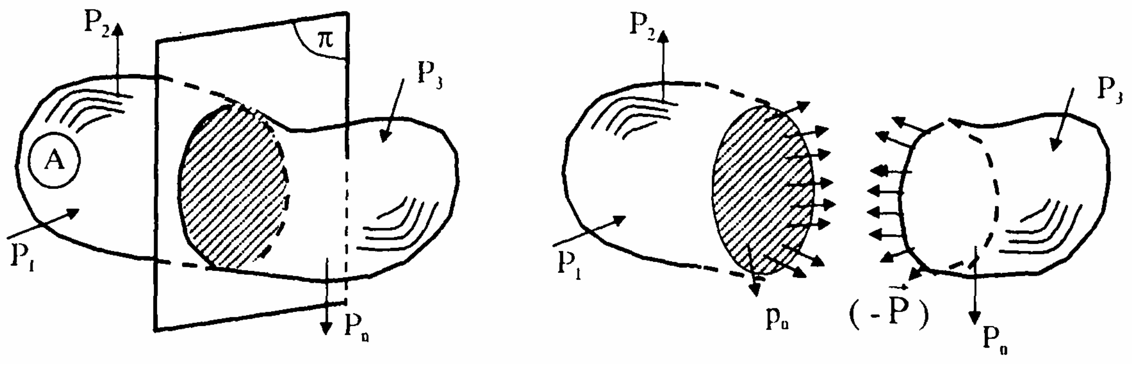
1. Định nghĩa nội lực

Để giữ cho vật thể có hình dạng và kích thước nhất định giữa các phần tử vật chất có các lực liên kết. Các lực này như đã biết là các lực liên kết phân tử v.v… Khi vật thể chịu tác dụng của ngoại lực các lực này sẽ tăng lên để cân bằng với ngoại lực. Nếu sự cân bằng này bị phá vỡ thì vật thể sẽ bị phá huỷ. Ta có định nghĩa tổng quát về nội lực như sau:

"Nội lực là phần lực liên kết tăng thêm khi vật thể chịu tác dụng của ngoại lực". Sức bền vật liệu chỉ nghiên cứu phần tăng thêm này mà không chú ý đến các lực liên kết ban đầu. Nếu ngoại lực bằng không thì nội lực cũng bằng không.

2- Phương pháp mặt cắt xác định nội lực:

Cho vật thể A chịu tác dụng của hệ lực P_1, P_2,... P_n,. Để xác định nội lực ta dùng phương pháp mặt cắt.Tưởng tượng cắt đôi vật thể bằng một mặt cắt π và giữ lại khảo sát phần bên trái. Giả sử hệ lực P_1, P_2,... P_n là hệ lực cân bằng (trường hợp không cân bằng cần áp dụng nguyên lý Đa lăm be và sẽ xét trong chương tải trọng động. Để phần bên trái làm việc giống như khi vật thể còn nguyên vẹn ta phải thay thế tác dụng của phần bên phải lên phán bên trái bằng một hệ lực $\vec{p}$ phân bố trên toàn bộ mặt cắt. Theo nguyên lý tưởng hỗ nếu ta khảo sát phần bên phải thì phải đặt vào mặt cắt của phần này hệ lực (- $\vec{P}$).



Hệ nội lực $\vec{P}$ cùng với các lực còn lại ở phần bên trái sẽ tạo thành một hệ lực cân bằng:

$$(\vec{P}_i)\text{ trái} + (\sum \vec{P}) = 0$$

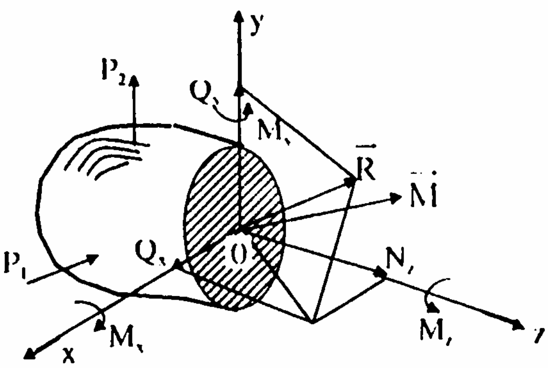
Tại trọng tâm 0 của mặt cắt lập một hệ trục toạ độ oxyz trong đó trục z vuông góc với mặt cắt còn trục x và y nằm trong mặt cắt. Thu gọn hệ nội lực $\vec{P}$ về từng tâm 0 ta được vectơ chính $\vec{R}$ và vectơ mômen chính $\vec{M}$ ta chiếu $\vec{R}$ và $\vec{M}$ lên các trục toạ độ ta được sáu thành phần: ba lực và ba mômen. Các thành phần này gọi là các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang (hình 11).

Tên gọi và quy ước dấu các thành phần nội lực như sau:

- N_z: gọi là lực dọc N_z coi là dương nếu nó hướng ra ngoài mặt cắt và ngược lại.

- Q_x, Q_y gọi là lực cắt. Chúng được coi là dưỡng khi quay pháp tuyến ngoài của mặt cắt theo chiều kim đồng hồ (tức là trục z) một góc 90^o thì chiều của pháp tuyến và chiều của lực cắt là trùng nhau với chú ý là người quan sát nhìn là chiều dương của các trục x và y. Trên hình vẽ ta có:

$$N_z > 0\ ;\ Q_x > 0\ ;\ Q_y < 0$$



Hình 11

- M_x, M_y gọi là mômen uốn. nó được xem là dương nếu làm căng các thớ thuộc về chiều dương của các trục toạ độ.

- M_z là mômen xoắn, nó được coi là dương khi dựng từ ngoài mặt cắt nhìn vào thấy M_z quay thuận chiều kim đồng hồ.

Lập sáu phương trình cân bằng: ba phương trình hình chiếu lên các truc x y z và ba phương trình mômen với các trục x, y, z đó ta có đủ số phương trình để xác định các thành phần nội lực, bài toán khi đó được gọi là tĩnh định.

$$(1\text{-}1)\quad \sum_{1}^{n} x\,(P_i)\text{ trái} + Q_x = 0\ ;\quad \sum_{1}^{n} m_x\,(P_i)\text{ trái} + M_x = 0$$

$$\sum_{1}^{n} y\,(P_i)\text{ trái} + Q_y = 0\ ;\quad \sum_{i=1}^{n} m_y\,(P_i)\text{ trái} + M_y = 0$$

$$\sum_{1}^{n} z\,(P_i)\text{ trái} + N_z = 0\ ;\quad \sum_{1}^{n} m_z\,(P_i)\text{ trái} + M_z = 0$$

Trường hợp toàn bộ ngoại lực nằm trong mặt phẳng. Ví dụ mặt phẳng yoz thì nội lực chỉ còn lại ba thành phần là N_z, Q_y và M_x, đây là bài toán phẳng của sức bền vật liệu. Nếu số ẩn cần tìm nhiều hơn số phương trình lập được thì bài toán gọi là siêu tĩnh.

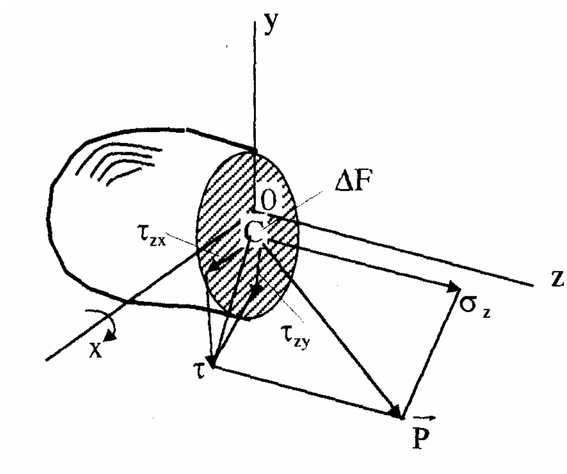
§4- ỨNG SUẤT CHUYỂN VỊ VÀ BIẾN DẠNG.

1- Ứng suất: Tại một điểm c bất kỳ trên mặt cắt ngang ta lấy bao quanh nó một diện tích vô cùng bé ΔF. (Hình 12) gọi hợp lực của các thành phần nội lực $\vec{P}$ trên diện tích ΔF là $\overrightarrow{\Delta p}$ và đặt:

$$\frac{\overrightarrow{\Delta P}}{\Delta F} = \overrightarrow{p_{tb}}$$

$\overrightarrow{p_{tb}}$ gọi là ứng suất trung bình tại điểm c. Cho ΔF tiến tới không mà vẫn bao quanh C, ta c o:

$$\lim_{\Delta F \to O} \frac{\overrightarrow{\Delta P}}{\Delta F} = \vec{P}$$



Hình 12

$\vec{P}$ được gọi là ứng suất thực tại điểm C.

Có thể thấy ngay rằng ứng suất thực tại một điểm nào đó chính là cường độ nội lực tại điểm đó.

Chiếu véctơ $\vec{P}$ lên phương vuông góc với mặt cắt và phương nằm trong mặt cắt ta được hai thành phần tương ứng là ứng suất pháp σ và ứng suất tiếp τ. Thành phần τ thường lại được phân theo hai phương còn lại trong mặt cắt, như vậy tại một điểm bất kỳ trong trường hợp tổng quát sẽ có ba thành phần ứng suất.

Các ứng suất pháp có chỉ số ở ẩn cạnh đó chỉ pháp tuyến của mặt cắt tức là chỉ phương của ứng suất.

Các ứng suất tiếp có hai chỉ số, chỉ số đầu chỉ pháp tuyến của mặt chứa ứng suất đó, chỉ số sau chỉ phương của ứng suất đó (xem hình 12).

Chúng ta dễ dàng thấy rằng các thành phần nội lực trên mặt cắt chính là tổng hợp của các thành phần ứng suất tương ứng. Giả sử gọi toạ độ của điểm C là x và y Từ hình 11 và hình 12 ta suy ra:

$$N_z = \int_F \sigma_z \, dF \; ; \; Q_x = \int_F \tau_{zx} \, dF \; ; Q_y = \int_F \tau_{zy} \, dF$$

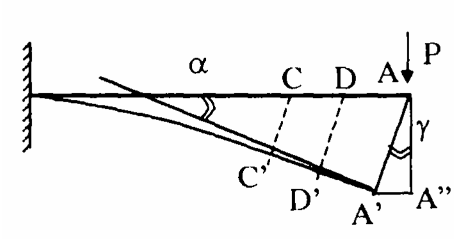
$$M_x = \int_F \sigma_z . y . dF \; ; \; M_y = \int_F \sigma_z .x . dF \qquad (1.2)$$

$$M_z = \int_F \tau_{zy} . x . dF + \int_F \tau_{zx} . y . dF$$

2- Chuyển vị và biến dạng:

Chuyển vị là sự dịch chuyển vị trí của điểm khảo sát trong hệ toạ độ đã chọn.

Biến dạng, như đã nói, là sự thay đổi hình dạng và kích thước hình học của vật thể.



Hình 13

Trên hình 13 mô tả một dầm công xôn chịu tác dụng của lực P. Đường nét đứt biểu diễn vị trí dầm sau khi chịu lực. Các điểm C, D, A di chuyển đến vị trí mới là: C', D', A'.

Đoạn $\overline{AA'}$ gọi là chuyển vị tuyệt đối của điểm A. Hình chiếu của $\overline{AA'}$ lên hai phương thẳng đứng và nằm ngang là $\overline{AA''}$ và $\overline{A'A''}$ trong đó $\overline{AA'}$ là chuyển vị thẳng đứng còn $\overline{A'A''}$ là chuyển vị ngang của A.

Giả sử chiều dài của đoạn CD là S của đoạn C'D' là S + Δ*S. T*ỷ số giữa ΔS và S được gọi là biến dạng dài trung bình của đoạn CD và ký hiệu là ε_{tb}

$$\varepsilon_{tb} = \frac{\Delta S}{S}$$

Nếu độ dài S chọn là một đơn vị chiều dài thì biến dạng ε_{tb} được gọi là biến dạng dài tỷ đối.

- Gọi γ là góc tạo bởi pháp tuyến của mặt cắt tại A với phương nằm ngang. γ được gọi là chuyển vị góc (hay góc xoay) của mặt cắt tại A.

- Khi làm việc trong giai đoạn đàn hồi, giữa chuyển vị và lực tác dụng (hay giữa biến dạng và ứng suất) có sự liên hệ tuân theo định luật Húc. Định luật này phát biểu như sau:

Trong giai đoạn đàn hồi tương quan giữa lực tác dụng và chuyển vị (hay giữa biến dạng và ứng suất là tương quan bậc nhất).

$$\overline{AA'} = k.\ P \qquad (1.3)$$

Trong công thức (1.3) k là hệ số tỷ lệ. Trị số của nó phụ thuộc vào tính chất của vật liệu và các đặc trưng hình học của hệ. Cụ thể là phụ thuộc vào khoảng cách tương đối giữa điểm tính chuyển vị và điểm đặt của lực.

Biến dạng và chuyển vị là hai khái niệm độc lập. Biến dạng liên quan đến toàn bộ vật thể hoặc một phần vật thể, chuyển vị gắn liền với điểm khảo sát. Thứ nguyên của chúng là hoàn toàn khác nhau.

Chương 2
KÉO NÉN THANH THẲNG

§1- ĐỊNH NGHĨA - BIỂU ĐỒ NỘI LỰC.

1- Định nghĩa: "Một thanh gọi là chịu kéo (nén) đúng tâm khi trên mọi mặt cắt ngang của nó chỉ có một thành phần nội lực là lực dọc N_z"

Trong chương này các công thức xây dựng chỉ áp dụng cho các thanh thẳng. Ngay đối với thanh thẳng có những phần bị giảm yếu cục bộ (có lỗ khoét rãnh khía,....) thì các công thức cũng không được áp dụng cho các phần đó.

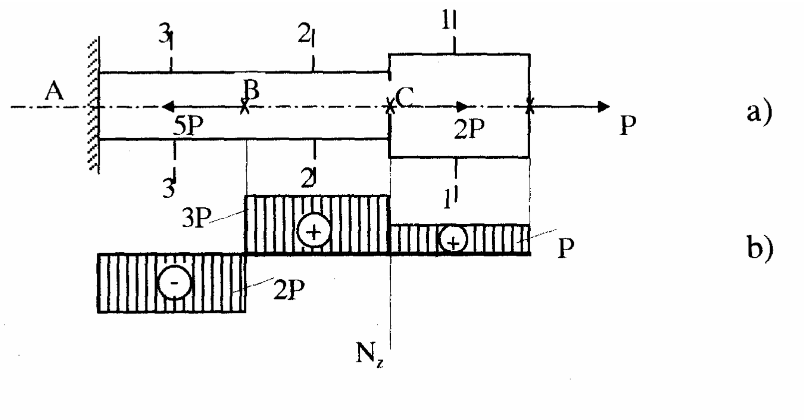
Từ định nghĩa trên ta thấy rằng việc kết luận một thanh chịu kéo (nén) đúng tâm không phụ thuộc vào cách đặt ngoại lực mà phụ thuộc vào sự xuất hiện thành phần nội lực nào trên mặt cách ngang.

2- Biểu đồ nội lực:

Định nghĩa: Biểu đồ nội lực là đường biểu diễn sự thay đổi về giá trị của nội lực dọc theo trục thanh.

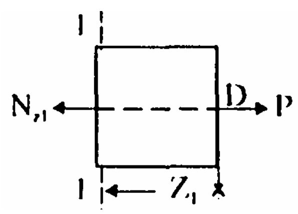
Định nghĩa trên đây cũng áp dụng cho các bài toán khác của sức bền như bài toán uốn, xoắn, v.v... Nội lực trong bài toán kéo nén là lực dọc N_z nên biểu đồ còn mang tên là biểu đồ lực dọc. Ta sẽ xét biểu đồ lực dọc qua một ví dụ cụ thể sau:

Thanh AD chịu tác dụng của các lực là P, 2P, 5P. Để vẽ biểu đồ lực dọc ta dùng phương pháp mặt cắt (hình 14).



Hình 14

* Bằng mặt cắt 1 - 1 ta khảo sát phần bơi phải. Nội lực trên mặt cắt là N_{z1}



Bằng phương trình hình chiếu lên phương z (phương của trục thanh). Ta có:

$$P - N_{z1} = 0. \text{ Hay } N_{z1} = P$$

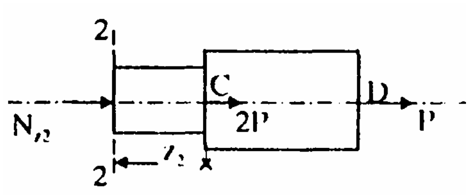
Giá trị của N_{z1} không thay đổi khi di chuyển mặt cắt từ điểm D đến sát điểm C. Nói khác đi trên đoạn CD, N_{z1} là một hằng số và mang dấu dương vì nó mang ra ngoài mặt cắt.

* Bằng mặt cắt 2-2 ta khảo sát phần bên phải.

Giả sử Nó có chiều từ trái qua phải. Phương trình cân bằng hình chiếu:

$$N_{z2} + 2P + P = 0$$

$$N_{z2} = - 3P$$



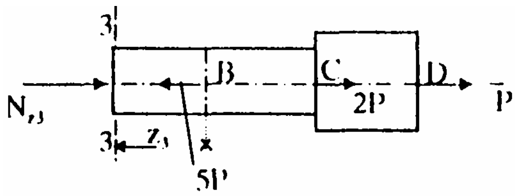
Dấu (-) chứng tỏ chiều của N_{z2}, như giả thiết là không đúng mà phải đổi chiều lại nghĩa là N_{z2} mang dấu dương và là hằng số từ C đến B.

* Bằng mặt cắt 3-3 ta khảo sát phần bên phải. Giá sử N_{z3} có chiều từ trái qua phải.

Phương trình cân bằng:

$$N_{z3} - 5P + 2P + P = 0$$

$$N_{z3} = 2P$$

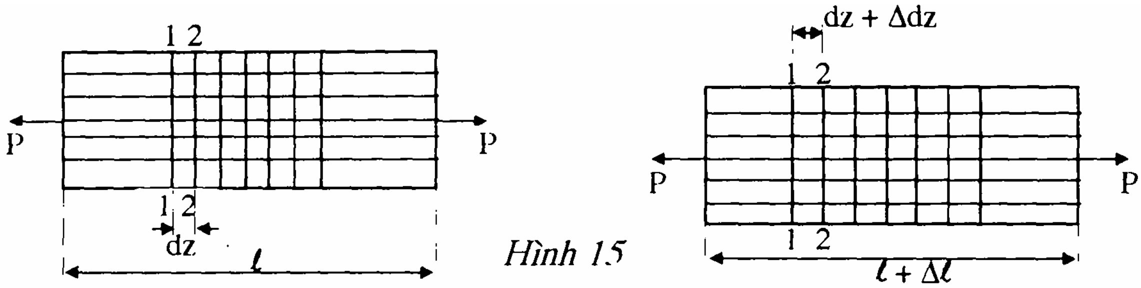


N_{z3} tính ra không có dấu (-) chứng tỏ chiều chọn là đúng, nghĩa là N_{z3} âm (hướng vào mặt cắt) và là hằng số từ B đến A. biểu đồ N_z trình bày trên hình l4b.

§2- ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG.

1- Ứng suất trên mặt cắt ngang.

Để lập công thức tính ứng suất trên mặt cắt ngang ta xét một thí nghiệm dưới đây: Trên thanh chịu kéo ta vạch các đường thẳng song song với trục thay thế cho các thớ dọc và các đường vuông góc với trục thay thế cho mặt cắt ngang. Sau khi mẩu chịu kéo, các ô vuông biến thành hình chữ nhật còn góc vuông vẫn không thay đổi.



Hình 15

Điều đó chứng tỏ các mặt cắt phẳng đã bị dịch chuyển tịnh tiến (hình 15) và thanh chỉ có biến dạng dài chứ không có biến dạng góc lực cắt do nguyên nhân gây nên biến dạng góc sẽ bằng 0 do đó từ hệ phương trình (1.2) ta thấy ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang bằng không.

Tưởng tượng mỗi thanh được cấu tạo nên bởi vô số các thớ dọc xếp khít bên nhau và đầu mỗi thớ dọc chính là một điểm trên mặt cắt ngang. Vậy mỗi thớ dọc sẽ chịu kéo bởi một lực chính bằng ứng suất tại điểm đó. V các mặt cắt phẳng dịch chuyển tịnh tiến nên độ đãn dài của các thớ dọc là như nhau. Từ đó suy ra ứng suất tại mọi điểm là như nhau.

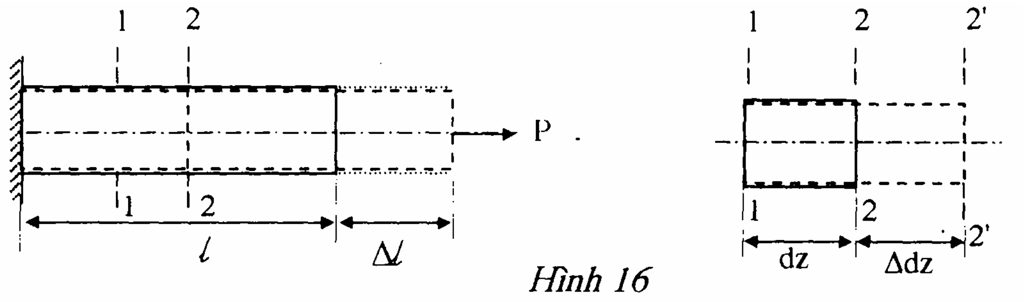
Vì σ_z là hằng số nên từ phương trình đầu của hệ phương trình (1.2) suy ra:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} \qquad (2.1)$$

Trong công thức (2.1), F là diện tích mặt cắt ngang, N_z là nội lực trên mặt cắt cần tính ứng suất. Thứ nguyên của ứng suất là $\left[\frac{\text{Lực}}{(\text{Chiều dài})^2}\right]$.

2- Biến dạng khi kéo nén.

Kích thước của một thanh chịu kéo (nén) sẽ thay đổi tuỳ thuộc vào giá trị của ngoại lực. Giả sử trước khi chịu lực thanh có chiều dài ℓ à ℓ và sau khi chịu lực nó có chiều dài ℓ à $\ell + \Delta\ell$. Trị số $\Delta\ell$ được gọi là biến dạng dài tuyệt đối của thanh (hình 16).



Hình 16

Bằng hai mặt cắt 1.1 và 2.2 xét một đoạn thanh có chiều dài vô cùng nhỏ dz. Sau biến dạng nên bị dài thêm một đoạn Δdz. Khi đó tỷ số Δdz và dz gọi là biến dạng dài tương đối và ký hiệu là ε

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} \qquad (2.2)$$

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trong giới hạn đàn hồi tuân theo định luật Húc. Áp dụng công thức (1.3) ta có:

$$\sigma_z = E.\,\varepsilon_z \qquad (2.3)$$

Đại lượng E trong công thức (2.3) được gọi là môđyn đàn hồi khi kéo hay là môđyn đàn hồi loại một. Trị số của nó phụ thuộc vào bản chất của vật liệu và được tìm bằng thực nghiệm. Vì ε_z không có thứ nguyên nên thứ nguyên của E giống như thứ nguyên của σ_z

Dưới đây là trị số E đối với một số vật liệu.

Thép: $E = (2 \div 2{,}1)\ 10^7\ N/cm^2$

Đồng: $E = 1{,}2.107\ N/cm^2$

Nhôm: $E = (0{,}7 \div 0{,}8).10^7\ N/cm^2$

Gỗ (dọc thớ): $E = (0{,}08 \div 0{,}12).10^7\ N/cm^2$

Mang (2.1) và (2.2) vào công thức (2.3) và biến đổi đi ta có:

$$\Delta dz = \frac{N_z.dz}{EF}$$

Suy ra: $$\Delta\ell = \int_0^\ell \Delta dz = \int_0^\ell \frac{N_z.dz}{EF} \qquad (2.4)$$

Nếu trên suốt chiều dài thanh N_z, E_iF là các hằng số thì:

$$\Delta\ell = \frac{N_z.\ell}{EF} \qquad (2.5)$$

(2.5) là công thức tính biến dạng dài tuyệt đối của thanh, $\Delta\ell$ sẽ có dấu phụ thuộc vào dấu của lực dọc N_z Nếu trên chiều dài thanh các thông số N_z, E, F thay đổi thì phải phân nhỏ tích phân (2.4) thành các đoạn mà trên đó cả ba thông số đều không thay đổi. Công thức (2.5), lúc này sẽ có dạng:

$$\Delta\ell = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_{zi}.\ell_i}{E_iF_i} \qquad (2.6)$$

Đối với những thanh chịu kéo nén, biến dạng dọc trục là ε_z thì theo hai phương vuông góc với phương z cũng tồn tại các biến dạng ε_x và ε_y, giữa chúng có mối liên hệ:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu\,\varepsilon_z \qquad (2.7)$$

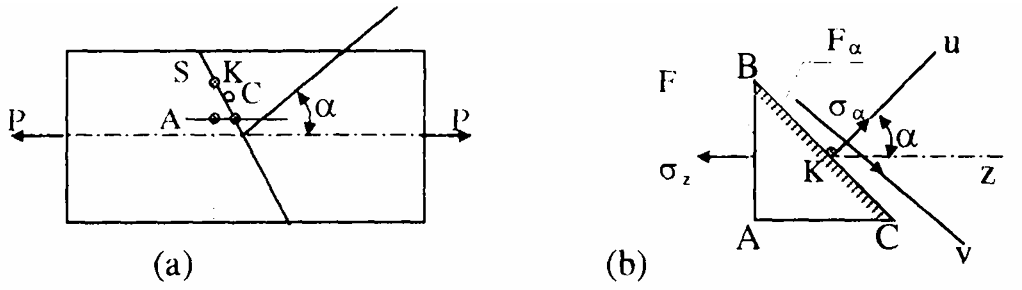
Trong công thức (2.5) μ là hệ số tỷ lệ, còn được gọi là hệ số pótxông. Trị số của μ luôn luôn nằm trong khoảng.

$$0 < \mu \le 0{,}5$$

Dấu (-) chứng tỏ rằng nếu theo phương z biến dạng là kéo thì theo phương x và y biến dạng là nén và ngược lại. Đối với kim loại trị số ít này khá nhỏ, chỉ với những vật liệu đặc biệt như cao su,... Thì μ mới đạt đến bằng 0,5 nghĩa là biến dạng ngang có trị số bằng một nửa biến dạng dài.

3- Ứng suất trên mặt cắt nghiêng:

Để xác định được mặt cắt có ứng suất lớn nhất nhằm đánh giá độ bền của công trình ta phải khảo sát toàn bộ ứng suất trên các mặt cắt khác nhau cùng đi qua một điểm. Nói khác đi ta phải khảo sát trạng thái ứng suất tại điểm đó. Giả sử cần xét ứng suất trên mặt cắt nghiêng đi qua điểm K, pháp tuyến của mặt cắt tạo với trục thanh một góc α. Tách ra khỏi thanh xung quanh điểm K một phân tố lăng trụ vô cùng bé (hình 17). Mặt AB trùng với mặt cắt ngang, mặt BC trùng với mặt cắt nghiêng còn mặt AC trùng gốc với trụ.



Hình 17

Chọn hệ thức uv như trên hình 17b, vì các mặt của phân tố là vô cùng nhỏ nên ứng suất được coi là phân hố đều. Ký hiệu diện tích mặt AB là F và và mặt BC là F_α Ta có:

$$F_\alpha = F/\cos\alpha \qquad \text{(a)}$$

Lần hai phương trình cân bằng hình chiếu cho phân tố hình 17b. Ta có:

$$\sum u = \sigma_\alpha \,.\, F_\alpha - \sigma_z \,.\, F \,.\, \cos\alpha = 0$$
$$\sum_v = \tau_\alpha \,.\, F_\alpha - \sigma_z \,.\, F \,.\, \sin\alpha = 0 \qquad \text{(b)}$$

Kết hợp (a) và (b) ta có:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_z \,.\cos^2\alpha = 0 \\ \tau_\alpha &= \frac{1}{2} \,.\sigma_z \,.\, \sin2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

Từ công thức (2.7) ta có một vài nhận xét sau đây:

(a) khi $\alpha = 0$; từ (2.7) có $\sigma_\alpha = \sigma_z$ và $\tau_\alpha = 0$. Mặt cắt ngang là mặt cắt có ứng suất pháp cực đại.

(b) Khi $\alpha = 90^o$; $\sigma_\alpha = 0 \Leftrightarrow \sigma_\alpha = 0$ tức là trên các mặt cắt dọc trục nội lực không có các thớ dọc không ép lên nhau và cũng không đẩy nhau. Việc kéo thanh có thể xem là kéo trên từng thớ riêng rẽ.

(c) Ứng suất tiếp τ_α đạt cực đại khi $\sin2\alpha = 1$ tức là $\alpha = 45^o$.

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma_z$$

(d) Xét mặt cải tạo với trục thanh góc $\alpha \div 90^o$.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{(\alpha+90^0)} &= \sigma_z \sin^2\alpha \\ \tau_{(\alpha+90^0)} &= -\frac{1}{2}\sigma_z \sin 2\alpha \end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

Từ (2.7) và (2.8) suy ra:

$$\sigma_{(\alpha+90^0)} + \sigma_\alpha = 6z = const$$

Tổng các ứng suất pháp trên hai mặt cắt vuông góc với nhau là một hàng số. Đó là bất biến thứ nhất của trạng thái ứng suất.

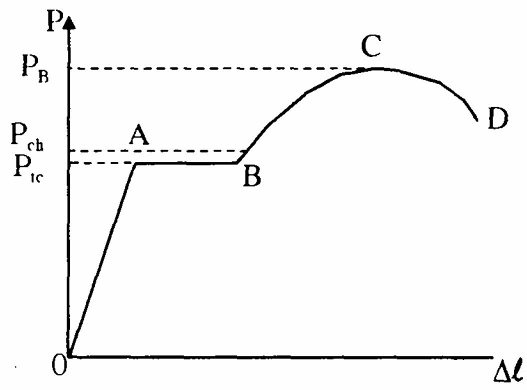
Phương trình thứ hai của (2.8) cho thấy rằng ứng suất tiếp trên hai mặt cắt vuông góc với nhau có trị số bằng nhau và dấu ngược nhau. Đó là luật đối ứng ứng suất tiếp. Từ quy ước về dấu của ứng suất tiếp trong chương I có thể thấy rằng các ứng suất tiếp trên hai mặt cắt vuông góc với nhau hoặc là cùng hướng vào giao tuyến của hai mặt cắt hoặc là cùng hướng ra khỏi giao tuyến

§3- CÁC ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU.

Để xác định được các đặc trưng cơ học của vật liệu, người ta phải tiến hành hàng loạt thí nghiệm khác nhau. Trong cuốn "Hướng dẫn thí nghiệm sức bền vật liệu" của bộ môn biên soạn năm 1996 đã trình bày tỷ mỹ một số bài thí nghiệm cơ bản, trong đó cũng sẽ giới thiệu kích thước mẫu thí nghiệm và cấu trúc, nguyên lý làm việc của máy thí nghiệm. Ở đây không trình bày những vấn đề đó mà chỉ giới thiệu việc khảo sát quá trình phá huỷ mẫu thí nghiệm.

1- Thí nghiệm kéo vật liệu:

<u>*a) Biểu đồ kéo vật liệu dẻo:*</u> Kéo mẫu cho đến khi mẫu bị phá huỷ ta vẽ được đồ thị tương quan giữa lực kéo (p) và biến dạng dài của mẫu (*Δℓ)* (hình 18). Có thể chia đường cong này thành một số vùng như sau:



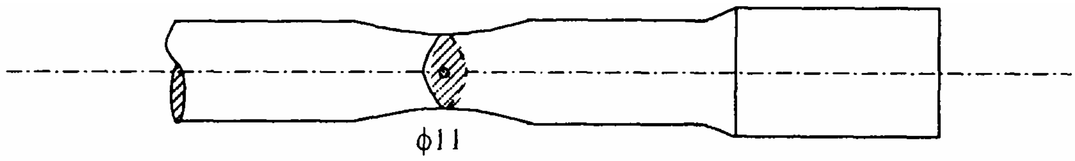
Hình 18

* Vùng OA được coi là vùng đàn hồi vật liệu ở giai đoạn này tuân theo định luật Húc, nghĩa là tương quan giữa P và $\Delta\ell$ là tương quan bậc nhất. Biến dạng của mẫu trong giai đoạn này như nhau.

* Giai đoạn AB trên biểu đồ tương ứng với giai đoạn chảy tổng thể của vật liệu. Sở dĩ có tên gọi như vậy là vì lực tác dụng trong giai đoạn này tuy không tăng song biến dạng vẫn tiếp tục tăng. Toàn bộ mẫu có sự thay đổi kích thước. Với những vật liệu có tính dẻo cao như nhôm, đồng, v.v... Thì giai đoạn này gần như chiếm toàn bộ đồ thị.

* Đoạn BC tương ứng giai đoạn củng cố, quan hệ lực P và biến dạng Δl không phải là bậc nhất cho đến điểm c trên mẫu xuất hiện vết thắt.

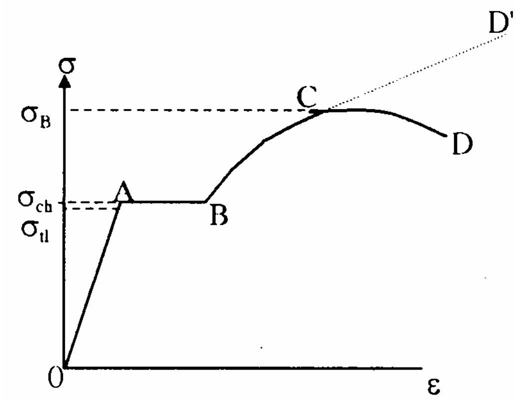
Quá trình tiếp theo biến dạng và lực kép sẽ có tương quan gần như trái ngược.



Hình 19

* Đoạn CD: Trên đồ thị đoạn CD ứng với giai đoạn chảy cục bộ. Biến dạng Δl chỗ thắt tăng lên rất nhanh, diện tích mặt cắt ngang giảm đi đột ngột làm mẫu bị phá huỷ. Do sự suy giảm nhanh chóng mặt cắt ngang, nên ứng suất trên mặt cắt vẫn tăng, mặc dù lực kéo trong giai đoạn này giảm xuống.

Gọi tiết diện mặt cắt ngang và chiều dài mẫu trước khi thí nghiệm là F_o và l_o Từ đồ thị kéo hình 18 ta có thể suy ra đồ thị tương quan giữa ứng suất (σ) và biến dạng tương đối (ε) bằng cách chia các trị số P cho F_o và chia $\Delta\ell$ cho ℓ_o. Dạng của đồ thị này (hình 20) giống như dạng đồ thị tương quan P và $\Delta\ell$ và gọi là đồ thị ứng suất quy ước. Sở dĩ gọi là đồ thị quy ước vì ta đã không xét đến sự thay đổi biến dạng mặt cắt ngang trong toàn bộ quá trình thí nghiệm.



Nên chú ý đến sự thay đổi diện tích mặt cắt ngang thì đồ thị sẽ được theo đường OCD'. Tại D' ứng với lực bị phá huỷ.

Gọi F^* là diện tích mặt cắt ngang tại chỗ đứt

Và ε^* là biến dạng tương đối mẫu đứt và xác định đi công thức:

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma^*}{E}$$

Đoạn thẳng CD là tiếp tuytìn của đường cong tại C.

Các giai đoạn tiền đồ thị σ - ε cũng có tên gọi như các giai đoạn trên đồ thị P-$\Delta\ell$. Trị số ứng suất tương ứng với các điểm A, B, C được gọi là: giới hạn tỷ lệ giới hạn chảy và giới hạn bền và ký hiệu.

$$\sigma_{(A)} = \sigma_{(tl)}\ ; \quad \sigma_{(B)} = \sigma_{(ch)}\ ; \quad \sigma_{(C)} = \sigma_B$$

Cả ba trị số σ_{tc} ; σ_{ch}; σ_B được gọi chung là đặc trưng cơ học về tính bền của vật liệu.

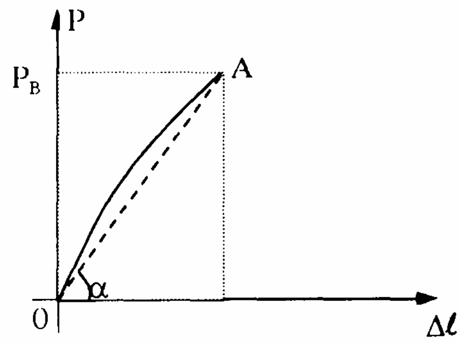
Gọi chiều dài mẫu sau khi bị đứt là $\ell_đ$ và tiết diện tại chỗ đứt là F_1 ta có hai giá trị đặc trưng cho tính dẻo là:

$$\varepsilon = \frac{\ell_d - \ell_o}{\ell_o} = 100\% \quad ; \qquad \psi = \frac{F_c - F_1}{F_o} = 100\%$$

các trị số ε và ψ được gọi tương ứng là độ đãn tỷ đối và độ thắt tỷ đối tính theo phần trăm. Đó là các đặc trưng cơ học về tính dẻo của vật liệu.

b) Biểu đồ kéo vật liều dòn.

Trên hình 21 cho ta tương quan giữa P và Δl khi kéo vật liệu dòn. Trị số lực kéo ứng với lúc mẫu bị phá huỷ (điểm A) gọi là P_B các loại vật liệu dòn bị phá huỷ đột ngột biến dạng còn rất nhỏ, chứng tỏ khả năng chịu kéo của vật liệu đòn là rất kém. Dạng của đường cong tuỳ thuộc vào bản chất của vật liệu thí nghiệm. Những loại vật liệu dòn như gang xám, thép có tỷ lệ các bon cao, đá, thuỷ tinh, v.v... khi bị phá huỷ biến dạng của chúng thường không vượt quá 2.5%, trong trường hợp đó biểu đồ thường được thay bằng đường thẳng (đường nét đứt trên hình 21).



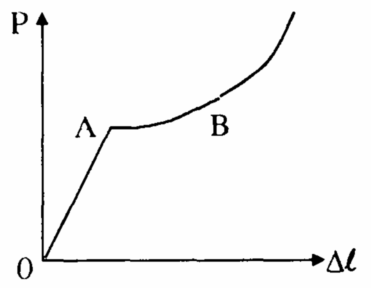
Hình 21

Tỷ số $\sigma_B = \frac{P_B}{F_o}$ được gọi là giới hạn bền đồ thị tương quan giữa ứng suất σ và biến dạng ε cũng giống như đồ thị tương quan P và $\Delta\ell$. Hệ số góc của đường thẳng OA (tgα) gọi là môđyn đàn hồi quy ước của vật liệu đòn.

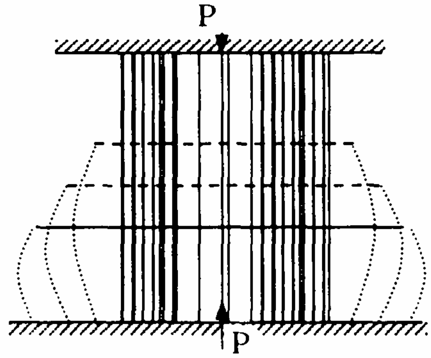
2- Thí nghiệm nén vật liệu:

a) Thí nghiệm nén vật liệu dẻo:

Vật liệu dẻo khi chịu nén diện tích mặt cắt ngang tăng lên, do vậy không thể nén mẫu cho đến khi phá huỷ. Đồ thị P - $\Delta\ell$ chỉ ra trên hình 22. Cũng như thí nghiệm kéo, đồ thị gồm có các vùng đàn hồi (OA), vùng chảy tổng thể (AB) và vùng củng cố. Đoạn nét đứt trên đồ thị chứng tỏ rằng nếu lực tiếp tục tăng thì biến dạng cũng tập tục tăng do vậy thí nghiệm nén vật liệu dẻo không thể xác định được giới hạn bền. Màu thí nghiệm trong quá trình chịu nén sẽ có dạng tang trong (hình 23) sở dĩ như vậy là vì do có ma sát giữa bề mặt tiếp xúc của mẫu và bàn nên làm cho sự dịch chuyển ngang bị hạn chế.



Hình 22



Hình 23

Nếu khử bỏ được ma sát tiếp xúc này thì mẫu thí nghiệm sẽ vẫn có dạng hình trụ nghĩa là biến dạng ngang tại mọi mặt cắt của mẫu là như nhau. Các trị số E, σ_{tl}, σ_{ch} khi nén cũng bằng hoàn toàn khi kéo.

b) Thí nghiệm nén vật liệu dòn:

Biểu đồ nén vật liệu dòn cũng giống như biểu đồ kéo (xem hình 21), giới hạn bền của vật liệu dòn (σ_{Bn}) khi nén cũng được xác định như khi kéo. Qua thí nghiệm, người ta thấy rằng tỷ số giữa giới hạn bền kéo (σ_{Bk}) và giới hạn bền nến thường khá nhỏ.

Với gang $\dfrac{\sigma_{Bk}}{\sigma_{Bn}} = 0,2 \div 0,4$;   với sứ $\dfrac{\sigma_{Bk}}{\sigma_{Bn}} = 0,1 \div 0,2$

Điều đó chứng tỏ rằng vật liệu dòn chịu nén tốt hơn nhiều so với chịu kéo. Chính vì lý do này, người ta thấy rằng các mẫu thí nghiệm thường bị phá huỷ theo các phương tạo với phương của lực tác dụng một góc α, ít khi nó bị vỡ theo phương của lực tác dụng.

Thông thường khi thí nghiệm, người ta chỉ cho đến giới hạn chảy và giới hạn bền, đó là các đặc trưng quan trọng để kiểm tra bên cho công trình. Ở đây cũng cần phải lưu ý rằng, trị số giới hạn bền kéo hoặc nén không phải là trị số làm cho mẫu bị phá huỷ vì ta đã lấy là số lực P_B chia cho diện tích ban đầu của mẫu (F_o) Nếu ta chú ý đến sự thay đổi diện tích mặt cắt ngang của mẫu theo thời gian thì sẽ thấy rằng ứng suất lúc mẫu bị phá huỷ lớn hơn giới hạn bền khá nhiều.

Trị số giới hạn chảy khi kéo ($\sigma_{ch}^{(k)}$) và khi nén ($\sigma_{ch}^{(n)}$) trị số giới hạn bền và môđuyn đàn hồi của một vài loại vật liệu thông dụng được cho trong bảng sau. Qua bảng này ta thấy rằng đối với vật liệu dẻo giới hạn chảy kéo và nén là xấp xỉ như nhau.

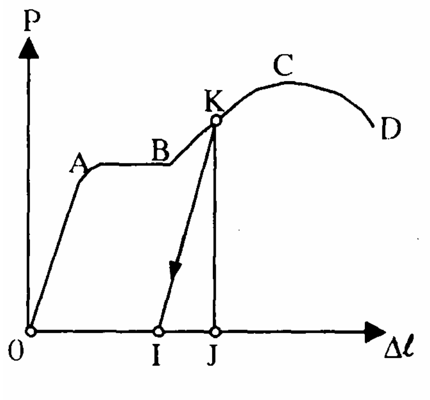
$$\sigma_{ch}^{(k)} \approx \sigma_{ch}^{(n)}$$

Bảng 1: Đơn vị sử dụng N/cm^2

Vật liệu	$\sigma_{ch}^{(k)}$	$\sigma_{ch}^{(n)}$	$\sigma_{B}^{(k)}$	$\sigma_{B}^{(n)}$	E
Thép ít các bon	15000	25000	33000	-	2.10^7
Thép 30 chưa tôi	33000	33000	33000	-	2.10^7
Thép 30 đã tôi	103000	30000	44000	-	2.10^7
Thép 45 chưa tôi	137000	37000	62000	-	2.10^7
Thép 45 đã tôi	104000	37000	103000	-	2.10^7
Thép 48 chưa tôi	25000	43000	63000	-	2.10^7
Thép 48 đã tôi	70000	70000	110000	-	2.10^7
Thép 30 ГДСА đã tôi	140000	140000	162000	-	2.10^7
Thép 40 XHB đã tôi	172000	210000	205000	-	2.10^7
Gang xám CЧ28	14000	31000	15000	34000	7.10^6
Than kỹ thuật	52000	52000	60000	-	$1,1.10^7$
Đồng đã nung	5500	5500	22000	-	$1,1.10^7$
Đồng thỏi	25000	25000	32000	-	$1,1.10^7$
Đồng thau	33000	33000	45000	-	$1,2.10^7$
Đồng thanh	11000	11000	13300	-	$1,2.10^7$
Nhôm	5000	5000	8400	-	7.10^6
Đuy ra	37000	34000	54000	7	$7,5.10^7$
Tecto-lit (nhựa)	7500	10500	12.700	16800	3.10^5

3- Biến dạng khi kéo nén:

Nếu tiến hành kéo mẫu không phải đợi lúc phá huỷ mà đến một giai đoạn nào đó δ điểm k trên đồ thị, ta ngừng tăng lực và sau đố từ từ giảm lực đi Trong quá trình bỏ lực đồ thị tương quan giữa P và $\Delta\ell$ sẽ đi theo đường KI (hình 24). Thí nghiệm chứng tỏ rằng đường KI song song với đường OA. Nếu điểm K nằm ở qua điểm A (nghĩa là thuộc vùng chảy hoặc vùng củng cố, thì điểm I không trùng với gốc)? Khi lực giảm về đến 0 biến dạng sẽ giảm được một đoạn là JI. Như vậy lúc này mẫu vẫn còn một lượng biến dạng là OI, đó là biến dạng dẻo hay biến dạng dư. Lượng biến dạng mất đi sau khi giảm lực (đoạn IJ) được gọi là biến dạng đàn hồi.



Hình 24

Tiếp tục thí nghiệm với mẫu cũ, ta lại tăng lực kéo thì đồ thị tương quan P- $\Delta\ell$ sẽ đi theo đường IK CD. Giai đoạn chảy tổng thể đã biến mất, đồ thị chỉ còn giai đoạn đàn hồi và giai đoạn củng cố. Giới hạn đàn hồi trong trường hợp này (điểm kì đã được nâng cao hơn so với lúc đầu (điểm A). Hiện tượng nâng cao được tính đàn hồi của vật liệu bằng cách làm cho vật liệu xuất hiện biến dạng dư được gọi là hiện tượng biến cứng nguội. Tính dẻo của vật liệu sau khi biến cứng nguội đã bị giảm. Người ta sử dụng hiện tượng trên trong kỹ thuật để nâng cao khả năng làm việc của chi tiết máy. Ví dụ các trục máy sau khi biến cứng nguội sẽ khử bỏ được biến dạng dư do đó không xuất hiện các ứng suất phụ tại chỗ lắp nối, v.v...

§4- ĐIỀU KIỆN BỀN VÀ CỨNG, KHI KÉO NÉN.

Từ thí nghiệm ta đã xác định được các đặc trưng cơ học của vật liệu. Dựa vào các số liệu này, ta sẽ đưa ra phương pháp tính bền và tính cứng cho công trình chế tạo bằng các loại vật liệu đó.

Khả năng làm việc bình thường của công trình hoặc chi tiết máy sẽ không bảo đảm được nếu ứng suất lớn nhất σ_{max} trong chúng đạt đến bằng σ_{ch} đối với vật liệu dẻo hoặc bằng σ_B với vật liệu dòn.

Trị số ứng suất nhỏ nhất trong các giá trị khiến cho công trình hay chi tiết máy không còn khả năng làm việc bình thường được gọi là ứng suất nguy hiểm và ký hiệu là σ_o.

Như vậy trị số σ_o sẽ phụ thuộc vào bản chất của vật liệu, đối với vật liệu dẻo người ta quy ước $\sigma_o = \sigma_{ch}$, còn vật liệu dòn $\sigma o = \sigma_B$. Sở dĩ chọn $\sigma_o = \sigma_{ch}$ với vật liệu dẻo là vì tuy rằng trị số σ_{ch} chưa làm phá huỷ vật liệu, song nó đã làm cho vật liệu có biến dạng dư khá lớn, biến dạng này sẽ làm cho công trình mất khả năng làm việc bình thường. Để đảm bảo an toàn, trị số ứng suất lớn nhất σ_{max} phải nhỏ hơn ứng suất nguy hiểm, nói khác đi ứng suất lớn nhất do ngoại lực gây ra phải thoả mãn bất đẳng thức sau:

$$\sigma_{max} \le \frac{\sigma_o}{n} \qquad (2.9)$$

Trong đó. n là một số trường và lớn hơn một.

n được gọi là hệ số an toàn. Ta đặt:

$$\frac{\sigma_o}{n} = [\sigma] \qquad (2.10)$$ gọi là ứng suất cho phép.

Khi đó: $\sigma_{max} \le [\sigma]$ (2.10')

Việc lựa chọn hệ số an toàn cho mỗi công trình phụ thuộc vào nhiều yếu tố: chất lượng của vật liệu, trình độ tính toán, ý nghĩa sử dụng của công trình, v.v... Hệ số an toàn chọn càng lớn thì công trình càng bảo đảm điều kiện bên song lại không kinh tế vì tốn nhiều vật liệu. Ngược lại chọn hệ số an toàn nhỏ sẽ tiết kiệm được vật liệu nhưng tuổi thọ của công trình sẽ không cao. Để thoả mãn cả hai yêu cầu đó, người kỹ sư khi thiết kế phải nắm được các phương pháp tính toán hiện đại. Việc giải các bài toán tối ưu, việc tính toán theo trạng thái giới hạn, đặc biệt là việc sử dụng máy tính điện tử trong thiết kế đã cho phép sử dụng được tối đa khả năng làm việc của vật liệu, đạt hiệu quả kinh tế cao.

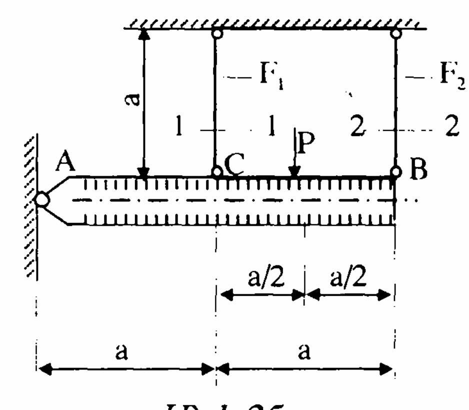
Xuất phát từ các yêu cầu về độ bền và độ cứng đã nói trong chương 1. Ta có các công thức kiểm tra bền và cứng sau:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma] \qquad (2.11)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} \leq [\varepsilon] \qquad (2.12)$$

Trong công thức (2.12) độ dãn dài tỷ đối cho phép [ε] cũng được xác định tương tự như [σ] nghĩa là $[\varepsilon] = \frac{\varepsilon_o}{n}$

ε_o là độ dãn dài tỷ đối nguy hiểm, với vật liệu dẻo trị số ε_o thường lấy vào khoảng $\varepsilon_o = 0{,}2 \div 0{,}5$ % hoặc xác định từ thực nghiệm.



Hình 25

Ví dụ l: Dầm AB tuyệt đối cứng được gắn bản lề tại A và treo bởi hai dây thép 30 có giới hạn chảy $\sigma_{ch}^{k} = 33000$ N/cm^2. Hệ số an toàn của hệ n = 2. Biết $F_1 = 3$ cm^2 ; $F_2 = 5$cm^2 ; a = 1 m.

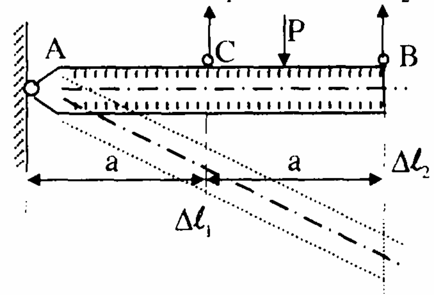
Hãy kiểm tra bền và cứng cho các dây treo, nếu P = 10^5N; [ε] = 0,2%

Bài giải

Áp dụng công thức (2.10) Ta có:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{ch}^{K}}{n} = \frac{33000}{2} = 16500$$

$[\sigma] = 16500$ N/cm^2



Hình 26

Để kiểm tra bền và cứng. Ta cắt ngang các dây (1) và (2) đặt vào các mặt cắt. Các nội lực tương ứng N_1 và N_2 (hình 26). Chiều N_1 và N_2 giả thiết như hình vẽ.

Từ phương trình cân bằng mômen với A ta có:

$$N_1 \,.\, a + N_2 \,.\, 2a - P \,.\, \frac{3}{2}\, a = 0$$

Suy ra:

$$N_1 + N_2 = \frac{3P}{2} \qquad a)$$

Chuyển vị ngang của điểm C khá nhỏ nên bỏ qua. Biến dạng của các dây thép gọi tương ứng là:

$\Delta\ell_1$ và $\Delta\ell_2$. Ta có: $\Delta\ell_2 = 2\,\Delta\,\ell_1$ hay:

$$\frac{N_2.a}{E.F_2} = 2\,\frac{N_1.a}{E.F_1} \rightarrow \frac{N_2}{F_2} = 2\,\frac{N_1}{F_1} \qquad b)$$

Giải hệ phương trình a) và b) ta có:

$N_1 = 19563$ N và $N_2 = 65210$N

Ứng suất trong các dây:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{19560}{3} = 6520 \text{ N/cm}^2 < [\sigma]$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{65210}{5} = 13042 \text{ N/cm}^2 < [\sigma]$$

Vậy hệ bảo đảm điều kiện bền.

Để kiểm tra điều kiện cứng ta chỉ cần kiểm cho dây số (2) vì nội lực $N_2 > N_1$.

$$\Delta\ell_2 = \frac{N_2.a}{E.F_2}$$

Tra bảng 1 với thép 30 có $E = 2.10^7$ N/cm^2

$$\Delta\ell_2 = \frac{65.210.100}{2.10^7.5} = 6{,}521\ .\ 10^{-2} \text{ cm}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta\ell_2}{\ell_2}\ .\ 100\% = 6{,}521.\ 10^{-2}\ .\ 100\%$$

$$\varepsilon_2 = 0{,}065\ \% < [\varepsilon]$$

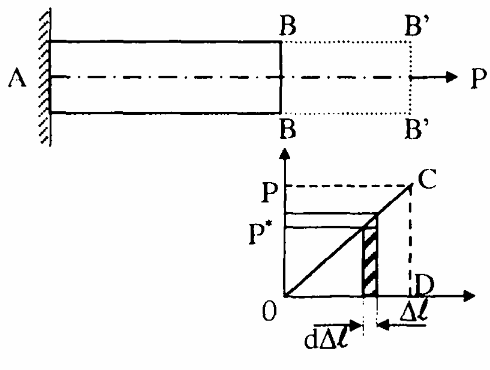
Hệ bảo đảm điều kiện cứng.

Khi giải bài toán cần lưu ý rằng nếu nội lực N_1 và N_2 tính ra có dấu (-) tức là chiều giả thiết ban đầu sai, cần phải đổi chiều lại.

§5- THẾ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI.

Trong giai đoạn đàn hồi tương quan giữa lực tác dụng P và biến dạng dài Δl là tương quan bậc nhất. Sau khi bỏ ngoài lực tác dụng vật thể sẽ khôi phục lại hình dạng và kích thước ban đầu năng lượng để thực hiện quá trình đó là năng lượng đã tích luỹ bên trong vật thể khi vật thể chịu tác dụng của ngoại lực và được gọi là thế năng biến dạng đàn hồi.

Xét thanh AB dài 1 chịu tác dụng lực P ở đầu tự do. Lực kéo đặt vào đầu tự do tăng từ 0 đến một giá trị P xác định biến dạng dài tương ứng tăng từ 0 đến $\Delta\ell$. Giá trị khi lực $P = P^*$ tăng thêm một lượng dở thì biến dạng tăng thêm một lượng là do Vì là tải trọng ảnh do vậy công của $PA + dP^*$ trên chuyển vì $d\Delta\ell$ được tính như cơ lý thuyết.



Hình 27

$$dA\ell = (P^* + dP^*)\, d\Delta\ell = P^* d\Delta\ell + dP^* d\Delta\ell$$

Biểu thức công dA biểu diễn một cách gần đúng diện tích của phần gạch dưới trên hình 27 như vậy toàn bộ công A do lực P thực hiện trên chuyển vị $\Delta\ell$ được biểu diễn với diện tích tam giác OCD. Công này chuyển thành thế năng biến dạng đàn hồi tích luỹ trong thanh.

$$U = A = \frac{1}{2} P \Delta\ell \qquad (2\text{-}13)$$

$$\text{Ta có: } \Delta\ell = \frac{N_z \ell}{EF} \text{ và ở đây } N_z = P; \quad \text{do đó } U = \frac{1}{2} \cdot \frac{N_z^2 \ell}{EF} \qquad (2.14)$$

Gọi u là thế năng biến dạng đàn hồi tích luỹ trên đơn vị thể tích là thế năng biến dạng đàn hồi riêng.

$$\text{Ta có:} \qquad U = \frac{U}{V} = \frac{N_z^2 . \ell}{2EF.F\ell} = \frac{N_z^2}{2EF^2} = \frac{\sigma_z^2}{2E} = \frac{\sigma_z . \varepsilon}{2}$$

Nếu trên suốt chiều dài thanh giá trị N_z không phải là hằng số thì ta phải khảo sát từng đoạn thanh trên đó N_z là hằng số và cộng các giá trị lại.

Giả sử trên đoạn thanh vô cùng bé dz thế năng biến dạng đàn hồi là dU.

$$dU = \frac{1}{2} \cdot \frac{N_z^2 . dz}{EF}$$

Thế năng trên toàn đoạn thanh thứ i nào đó sẽ là:

$$U_i = \int_0^{\ell} \frac{1}{2} \frac{N^2_{zi}.dz}{E.F_i}$$

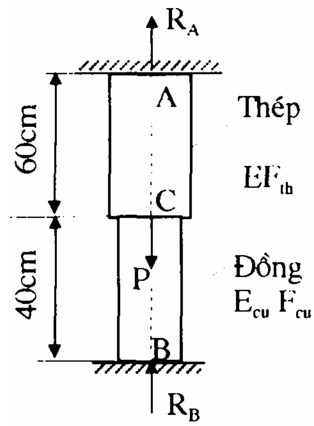
Thế năng trên toàn thanh gồm có n đoạn mà trên đó các giá trị N_z, E, F là hằng số.

$$U = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell_i} \frac{N^2_{zi}.dz}{2E_i.F_i} \qquad (2.16)$$

§6- BÀI TOÁN SIÊU TĨNH.

Những bài toán với số phương trình cân bằng tĩnh học không đủ để xác định được nội lực và ứng suất trên mặt cắt được gọi là bài toán siêu tĩnh. Muốn giải bài toán này cần phải lập thêm các phương trình biến dạng. Ta sẽ xét qua một ví dụ cụ thể:

Ví dụ 2. Thanh AB được ghép bởi hai đoạn thép và đồng chịu tác dụng bởi lực P. Hãy vẽ biểu đồ lực dọc, biểu đồ ứng suất, $\Delta\ell$



Hình 28

Biết:

$E_{th} = 2.10^7$ N/cm^2 ; $E_{cu} = 1.\ 10^7$ N/cm^2

$F_{th} = 15$ cm^2 ; $F_{cu} = 10$ cm^2

$P = 12.\ 10^4$N. Hai đầu A, B ngàm cứng.

Giải:

Dưới tác dụng của P đoạn AC sẽ dãn và đoạn CB bị co lại, phản lực tại 2 ngàm tương ứng là R_A và R_B chiều R_A và R_B giả sử như hình vẽ.

Ta có phương trình cân bằng:

$$R_A + R_B - P = 0 \ (a)$$

Phương trình 2 ẩn số ta chưa giải được lực R_A và R_B ta phải lập thêm phương trình biến dạng. Điều kiện biến dạng ở đây là chuyển vị giữa hai mặt cắt qua A và B bằng không. Tưởng tượng bỏ ngàm B và thay vào đó là phản lực R_B

Chuyển vị của mặt cắt B do P gây ra là:

$$\Delta\ell_P = \frac{P.\ell_{th}}{E_{th}.F_{th}} \qquad (b)$$

Chuyển vị của mặt cắt B do R_B gây ra:

$$\Delta\ell_{RB} = -\frac{R_B.\ell_d}{E_d.F_d} - \frac{R_B.\ell_{th}}{E_{th}.F_{th}} \qquad (c)$$

Biểu thức c) có dấu (-) vì lực RB gây nén thanh AC. Từ điều kiện biến dạng đã nêu ở trên ta có:

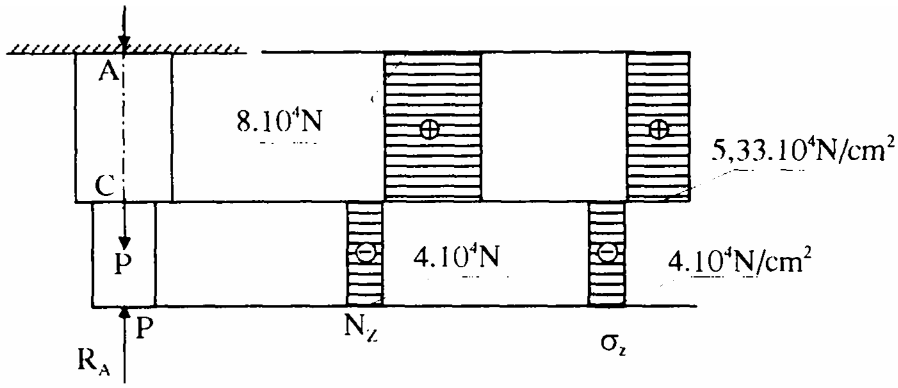
$$\Delta\ell_B = \frac{P.\ell_{th}}{E_{th}.F_{th}} - \frac{R_B.\ell_d}{E_d.F_d} - \frac{R_B.\ell_{th}}{E_{th}.F_{th}} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad R_B = \frac{P}{1 + \dfrac{\ell_d.E_{th}.F_{th}}{\ell_{th}.E_d.F_d}}$$

Thay số ta có: $R_B = \dfrac{12.10^4}{1 + \dfrac{40.2.10^7}{60.1.10^7}.\dfrac{15}{10}} = 4.10^4$ N

- Từ phương trình a) ta có: $R_A = 12.10^4 - 4.10^4 = 8.10^4$N

Biểu đồ lực dọc và ứng suất được vẽ trên hình 29.



Hình 29

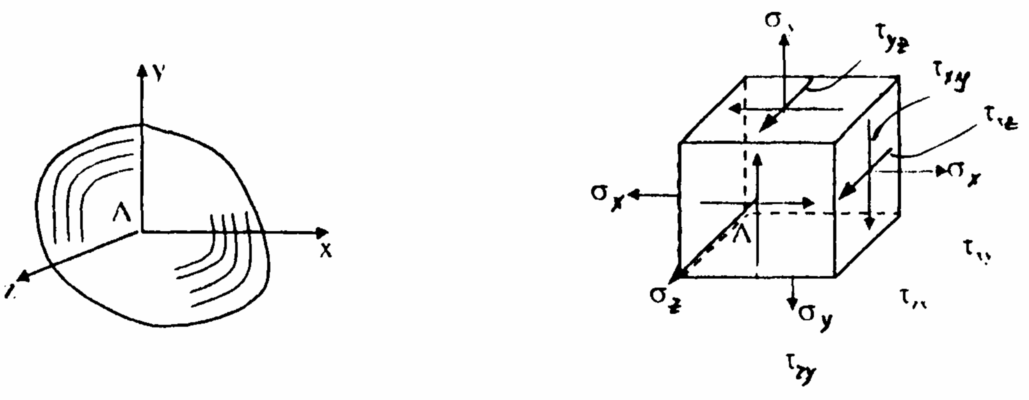
Chương 3
TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

§1 - ĐỊNH NGHĨA VÀ PHÂN LOẠI TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

Dưới tác dụng của ngoại lực ứng suất trên các mặt cắt khác nhau di qua một điểm cố định sẽ loay đổi tuỳ thuộc vào sự định hướng của một cắt trang hệ quy chiếu đã chọn. Sự thay đổi đó tuân theo những quy luật phụ thuộc vào tính chất của tải trọng tác dụng ra các định nghĩa sau về trạng thái ứng suất.

"Tập hợp tất cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên các mặt cắt đi qua một điểm cố định cho trước được gọi là trạng thái ứng suất tại điểm đó".

Tách ra khỏi điểm A trong vật thể một phân tố hình lập phương các cạnh là dx = dy = dz (xem hình 30).



Hình 30

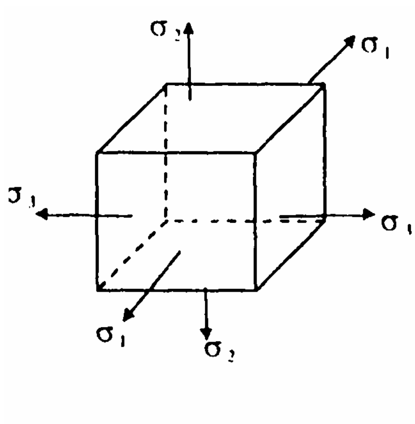
Trong trường hợp tổng quát trên các mặt của phân tố sẽ cá ba thành phần ứng suất. Toàn bộ phân tố có mười tấm thành phần ứng suất. Vì dx, dy, dz là vô cùng bé nên ứng suất pháp trên các mặt song song với nhau ta coi là như nhau.

Ứng suất pháp σ có kèm theo chỉ số x, y, z ở bên cạnh để chỉ phương của ứng suất.

Ứng suất tiếp τ có kèm theo hai chỉ số. Chỉ số thứ nhất chỉ pháp tuyến của mặt chứa ứng suất tiếp đó, chỉ số thứ hai chỉ phương của ứng suất tiếp.

Do luật đối ứng ứng suất trên ta thấy trong 18 thành phần ứng suất chỉ có 6 thành phần độc lập (3 ứng suất pháp và 3 ứng suất tiếp).

Lý thuyết đàn hồi đã chứng minh được rằng trong số các phân tố tách ra khỏi A ta luôn luôn cỏ thể tìm được một phân tố duy nhất mà trên các mặt của phân tố không có ứng suất tiếp. Phân tố đó được gọi là phân tố chính. Các mặt của phân tố gọi là mặt chính, phương của ứng suất pháp được gọi là phương chính và các ứng suất pháp đó được gọi là ứng suất chính. Ta ký hiệu các ứng suất chính là σ_1, σ_2, σ_3 phù hợp với các phương chính là I, II, III (hình 31) theo thứ tự σ_1, > σ_2 > σ_3



Hình 31

Ở đây lưu ý rằng giá trị của ứng suất chính có kể cả đến dấu của chúng.

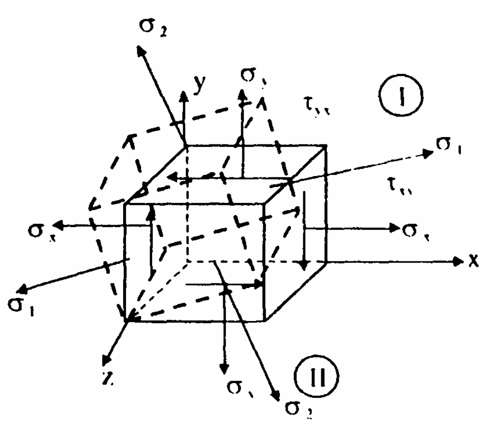
Trạng thái ứng suất nào trên phân tố chính có đủ cá ba ứng suất pháp σ_1, σ_2, σ_3 được gọi là trạng thái ứng suất khối (không gian). Nếu một trong ba ứng suất chính bằng không ta có trạng thái ứng suất phẳng (ứng suất mặt).

Nếu hai trong ba ứng suất chính bằng không ta có trạng thái ứng suất đơn (đường). Trạng thái này ta đã gặp khi xét vật thể chịu kéo nén đúng tâm.

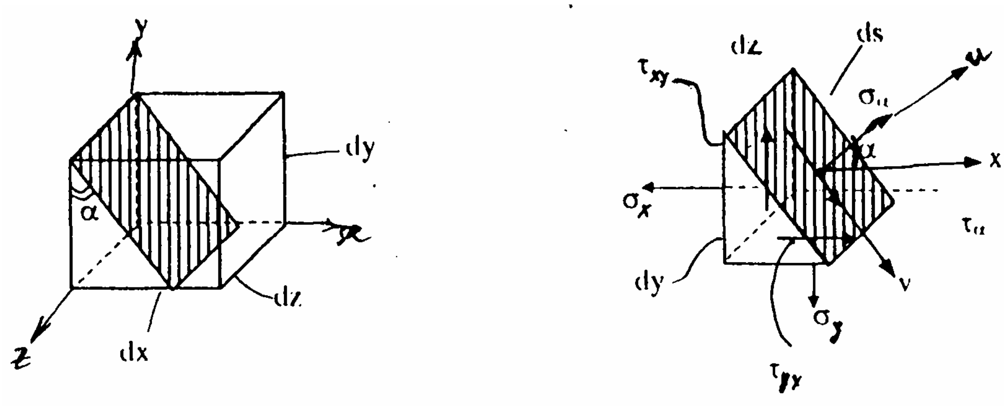
§2- TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT THẲNG

1. Ứng suất trên mặt cắt xiên.

Luật đối ứng, ứng suất tiếp. Xét phân tố có các ứng suất trên hình 32. Trên hai mặt vuông góc với trục z không có ứng suất. Xoay phân tố di một góc α quanh trục z ta sẽ có một phân tố mới mà các mặt còn lại chỉ có ứng suất pháp. Như vậy trạng thái ứng suất biểu diễn bởi hình vẽ là trạng thái ứng suất phẳng. Ta sẽ xét ứng suất trên một mặt cắt xiên có pháp tuyến tạo với trục x một góc α (hình 33).



Hình 32



Hình 33

Gọi σ_α và τ_α là ứng suất pháp và tiếp trên mặt cắt. Lập hệ trục tuy trang đã trục v vuông góc với mặt cắt xiên, trục u nằm trong mặt phẳng vuông góc và trục z.

Lập các phương trình cân bằng hình chiếu lên phương u và v ta có

$$\sum v = \sigma_\alpha ds dz - \sigma_x d_y d_z \cos\alpha - \sigma_y d_x d_z \sin\alpha +$$
$$+ \tau_{xy} d_y d_z \sin\alpha + \tau_{yx} d_x d_z \cos\alpha = 0 \qquad (a)$$
$$\sum u = \tau_\alpha ds dz - \sigma_x d_y d_z \sin\alpha + \sigma_y d_x d_z \cos\alpha -$$
$$- \tau_{xy} d_y d_z \cos\alpha + \tau_{yx} d_x d_z \sin\alpha = 0 \qquad (b)$$

Chú ý đến các liên hệ:

$$\sin\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \;; \quad \cos\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$
$$2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \;; \; dx = ds \sin\alpha \;; \; d_y = ds \cos\alpha$$

Ta đưa hệ phương trình (a), (b) về dạng:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}1)$$

Từ hệ phương trình (3-1) ta thấy ứng suất trên mặt cắt xiên phụ thuộc vào gốc nghiêng α. Nếu phân tố khảo sát ban đầu là phân tố chính (phân tố về nét đứt trên hình 32), thì ứng suất trên mặt xiên có pháp tuyến tạo với phương 1 một góc α sẽ là:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

Từ (3.1) dễ dàng suy ra khi:

$$\alpha = 0 \;\rightarrow\; \sigma_\alpha = \sigma_x \;; \quad \tau_\alpha = \tau_{xy}$$
$$\alpha = 90^\circ \rightarrow\; \sigma_\alpha = \sigma_y \;; \quad \tau_\alpha = \tau_{yx}$$

Nếu khảo sát mặt cắt xiên thứ hai vuông góc với một cắt xiên ban đầu ta có:

$$\tau_{(\alpha+90^\circ)} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2(\alpha + 90^\circ) + \tau_{xy} \cos 2(\alpha + 90^\circ)$$
$$\Rightarrow \quad \tau_{(\alpha+90^\circ)} = -\tau_\alpha \qquad (3.3)$$

Biểu thức (3.3) chính là biểu thức của luật đối ứng ứng suất tiếp đã biết trong chương 2.

2- Phương chính và ứng suất chính:

Phân tố đã cho có một phương chính là phương z vì ứng suất tiếp trên mặt cắt bằng không.

Muốn tìm hai phương chính còn lại ta chỉ việc cho phương trình thứ hai của (3-1) bằng không ta sẽ tìm được góc $\alpha = \alpha_o$ mà ứng với nó. $\tau_\alpha = 0$

Tức là: $$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha_o + \tau_{xy}\cos 2\alpha_o = 0 \qquad (c)$$

hay suy ra: $$tg2\alpha_o = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (3.4)$$

Đặt: $$\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = tg\beta$$

Giải phương trình lượng giác (3.4) ta có: $$\alpha_o = \frac{\beta}{2} + K\,90^o \qquad (3.5)$$

Trong đẳng thức (3.5) K là một số nguyên dương. Các giá trị α_o sai khác nhau 90^o. Nói khác đi từ biểu thức (3.5) ta luôn tìm được hai phương vuông góc với nhau, đó là hai phương chính cần tìm. Mang giá trị α_o theo (3.5) và phương trình đầu của (3.1) ta sẽ được giá trị các ứng suất chính. Đó là các cực trị của ứng suất pháp.

Thật vậy:

$$\left.\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_o} = -2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha_o + \tau_{xy}\cos 2\alpha_o\right)$$

Từ (c) suy ra: $$\left.\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_o} = 0$$

Biến đổi một số công thức:

$$\sin 2\alpha = \pm\frac{tg2\alpha}{\sqrt{1+tg^2 2\alpha}} \quad ; \qquad \cos 2\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 2\alpha}}$$

hay $$tg2\alpha_o = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$ thay kết quả vào (3-1)

Đạo hàm bậc nhất bằng không hàm số có giá trị cực trị. Mang α_o xác định theo (3.5) vào (3.1) ta sẽ có các cực trị do:

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \qquad (3.6)$$

Từ (3.6) suy ra: $\sigma_{max} + \sigma_{min} = \sigma_x + \sigma_y = const$

Tổng ứng suất pháp trên hai mặt cắt vuông góc với nhau luôn là một hằng số. Đó là bất biến thứ nhất của trạng thái ứng suất.

Khi kết luận về một trạng thái ứng suất là đơn hay phẳng, hay khối chúng ta chỉ được phép đánh giá qua phân tố chính, tuy nhiên nếu trên một mặt nào đó không có ứng suất kéo theo mặt song song với nó cũng vậy thì ta có thể kết luận chắc chắn rằng đó không thể là trạng thái ứng suất khối. Đây chính là điều giải thích vì sao ta nói phân tố ở hình 32 là thuộc về trạng thái ứng suất phẳng.

Các ứng suất tiếp sẽ có giá trị cực trị trên các mặt cắt tạo với các mặt chính một góc 45^o. Điều này có thể suy ra được qua một phép khảo sát hàm số đơn giản. Các cực trị này là:

$$\tau_{\substack{max \\ min}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \qquad (3.7)$$

3 - Vòng tròn Mo ứng suất *(nghiên cứu ứng suất bằng vòng tròn)*

a) Phương trình - cách vẽ:

Như đã biết trong hình học giải thích: phương trình tham số của một vòng tròn trong hệ toạ độ đề các oxy là:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\varphi = f(\varphi) \\ y &= R\sin\varphi = g(\varphi) \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Nếu chúng ta lập một hệ trục toạ độ σ - τ và chú ý đến nhận xét trên thì sẽ thấy ngay hệ phương trình (3.1) cũng chính là phương trình tham số của một vòng tròn, ta sẽ viết phương trình chính tắc của vòng tròn này bằng cách chuyển thừa số $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ trong phương trình đầu của (3.1) sang trái rồi bình phương cả hai vế ta có:

$$\left.\begin{aligned} &(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2})^2 = (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha)^2 \\ &\tau_\alpha^2 = (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha)^2 \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Khai triển vế phải rồi cộng từng vế hệ phương trình (c) ta được:

$$\left.\begin{aligned} &(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2})^2 + \tau_\alpha^2 = (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2 \\ &\text{Đặt: } \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = C \text{ và } (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2 = R^2 \end{aligned}\right\} \quad (g)$$

Từ (g) suy ra:

$$(\sigma_\alpha - c)^2 + \tau_\alpha^2 = R^2 \qquad (3.8)$$

Vòng tròn thể hiện bởi phương trình (3.2) có tâm nằm trên trục σ cách gốc toạ độ một đoạn là c và có bán kính là R. Đó chính là vòng tròn Mo ứng suất

Như vậy chúng ta thấy rằng ứng suất trên một mặt cắt xiên nào đó có thể tìm được qua hệ phương trình (3.1) nếu đã biết vị trí của mặt cắt. Nói khác đi hệ phương trình (3.1) là cách biểu dẫn giải tích trạng thái ứng suất tại một điểm. Rõ rằng là vòng tròn vẽ theo hệ phương trình (3-8) chính là cách biểu diễn hình học trạng thái ứng suất của điểm đó. Ta có thể chứng tỏ rằng mỗi điểm trên vòng tròn tương ứng với một mặt cắt nghiêng và toạ độ của điểm đó chính là giá trị của ứng suất trên mặt cắt nghiêng đó. Để về vòng Mo ta tiến hành như sau:

* Lập hệ trục σ - τ trong đó trục σ chọn song song với phương x. Trục τ song song với phương y.

* Trên trục σ đặt một đoạn 0E = σ_x và 0F = σ_y

* Dựng các đoạn E0 = τ_{xy} và F0' = σ_{yx} vuông gác với trục σ.

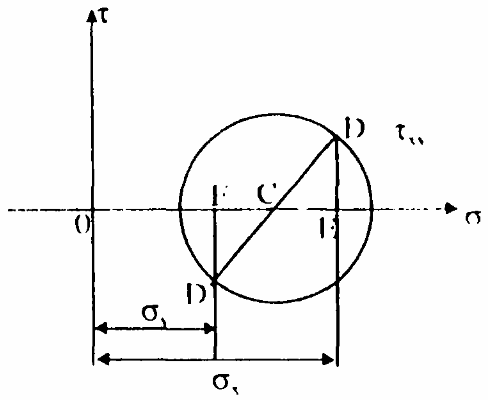
* Nối D và D', đoạn DD' cắt trục σ ở C.

* Về vòng tròn lâm C bán kính CD đó chính là vòng Mo ứng suất.

Thật vậy vòng tròn này có các thông số:

$$OC = OF + \frac{OE - OF}{2} = \sigma_y + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = C$$

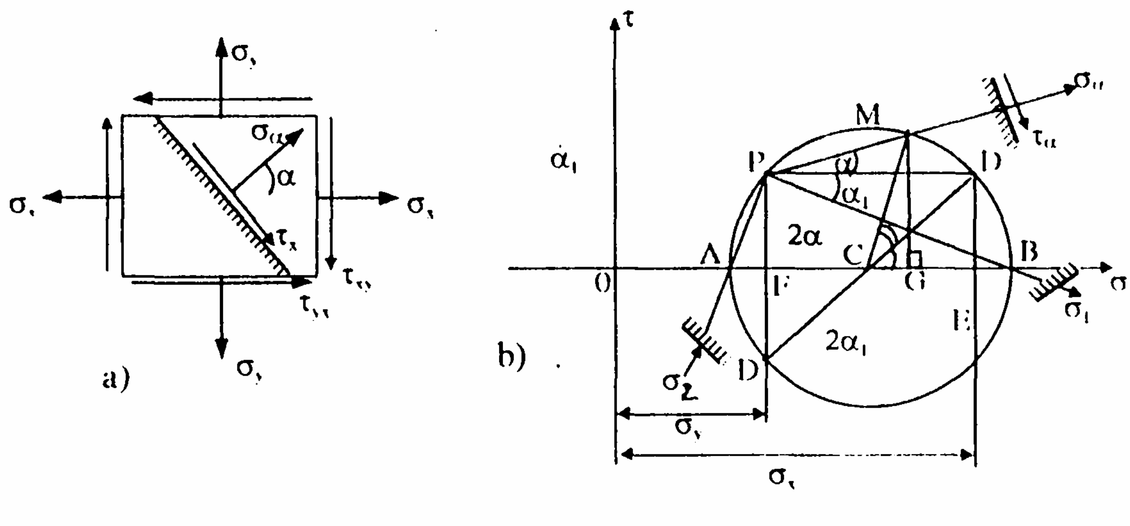
$$CD^2 = CE^2 + ED^2 = \left(\frac{OE - OF}{2}\right)^2 + ED^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2 = R^2$$



Hình 34

b) Công cụ của vòng Mo

Trong phần này ta sẽ dùng vòng Mo để giải quyết bài toán xác định ứng suất trên các mặt cắt xiên có pháp tuyến tạo với trục x một góc α, xác định phương chính là ứng suất chính (hình 35). Trên vòng tròn to xác định một điểm P có toạ độ (σ_y, τ_{xy}) gọi là điểm cực của vòng Mo.



Hình 35

Từ P kẻ tia song song với phương pháp tuyến của mặt cắt xiên. Tia này cắt vòng Mo tại điểm M. Ta sẽ chứng tỏ rằng toạ độ của điểm M chính là σ_α và τ_α.

Thật vậy, trên hình vẽ ta có:

$$OG = OC + CG = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R\cos(2\alpha_1 + 2\alpha)$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R\cos 2\alpha_1 \cos 2\alpha - R\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha$$

Nhưng ta có: $\quad R\cos 2\alpha_1 = CE = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$

$$R\sin 2\alpha_1 = ED = \tau_{xy}$$

Do đó: $\quad OG = \sigma_\alpha = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$

Tương tự như trên:

$$GM = \tau_\alpha = R\sin(2\alpha_1 + 2\alpha)$$

$$= R\sin 2\alpha_1 \cos 2\alpha + R\cos 2\alpha_1 \sin 2\alpha$$

$$GM = \tau_\alpha = \tau_{xy}\cos 2\alpha + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha$$

Vì phương pháp dùng vòng Mo là phương pháp hình học nên việc tính ứng suất trên mặt cắt có thể thực hiện bằng cách sử dụng các tương quan hình học phẳng hoặc đo theo tỷ lệ xích.

Như đã nói, mỗi điểm trên vòng Mo tương ứng với một mặt cắt ta nó ta sẽ chú ý tới một số điểm đặc biệt.

Hai điểm A và B có hoành độ (ứng suất pháp) lớn nhất và nhỏ nhất còn tung độ (ứng suất tiếp), bằng không. Như vậy hai điểm thường thể hiện hai mặt chính cần tìm. Nối các tia PA và PB ta có hai phương chính. Các ứng suất chính sẽ là:

$$\sigma_A = \sigma_2;\ \sigma_B = \sigma_1 \text{ và } \sigma_3 = 0$$

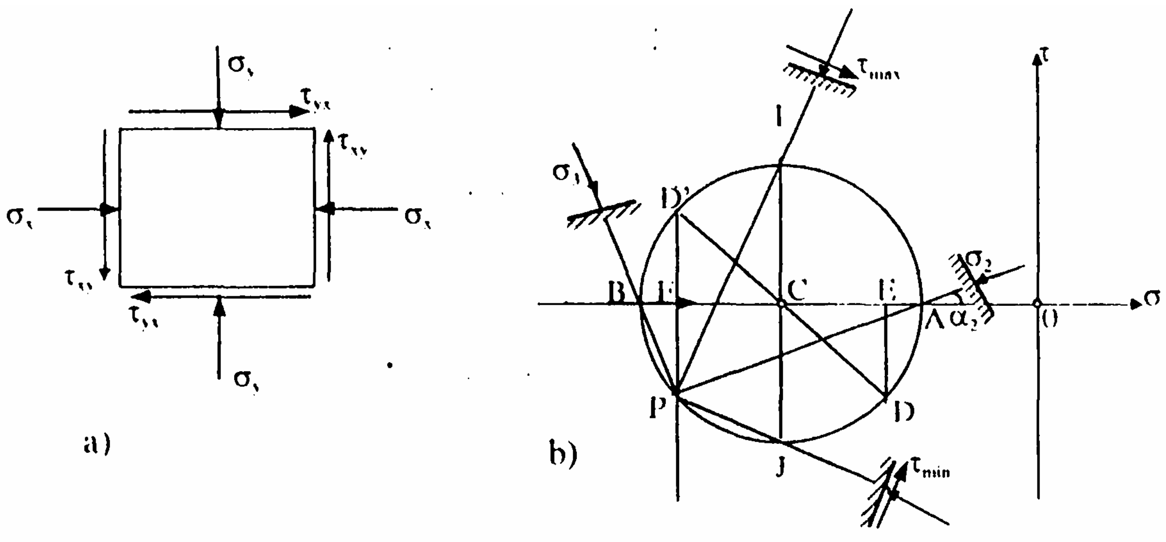
- Hai điểm I và J có tung độ lớn nhất và nhỏ nhất, nó thể hiện các mặt cắt có ứng suất tiếp cực đại và cực tiểu. Rõ rằng là các mặt này nghiêng so với mặt chính một góc 45^o.

Phân tố chính và ứng suất chính là duy nhất không phụ thuộc vào cách chọn hệ trục toạ độ nếu ta xoay hệ trục toạ độ đi một góc 90^o tức là chọn trục $\sigma \parallel y$ còn trục $\tau \parallel x$ thì cực P phải lấy toạ độ là (σ_x, τ_{xy})

<u>Ví dụ:</u> Phân tố có ứng suất như hình vẽ. Hãy xác định phương chính ứng suất chính, ứng suất tiếp cực đại và cực tiểu nếu biết $\sigma_x = -200\ MN/m^2$, $\sigma_y = -400\ MN/m^2$. $\tau_{xy} = -200\ MN/m^2$.

Bài giải:

Vòng Mo ứng suất vẽ được như hình (36b). Các ứng suất của phân tố âm nên vòng Mo nằm hoàn toàn ở bên trái trục τ.



Hình 36

Điểm cực P (σ_y, τ_{xy}) nằm phía dưới trục hoành.

Từ hình vẽ ta có: $CE = \frac{1}{2}(OF - OE) = \frac{1}{2}(400 - 200) = 100$

Bán kính vòng Mo:

$$R = CĐ = \sqrt{CE^2 + ED^2} = \sqrt{100^2 + 100^2} = 225$$

$$OC = C = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{1}{2}(400 + 200) = 300$$

$$OA = |\sigma_2| = OC - R = 300 - 225 = 75$$

$$\sigma_2 = -75\ MN/m^2$$

$$OB = |\sigma_2| = OC + R = 300 + 225 = 525$$

$$\sigma_3 = -525\ MN/m^2$$

Ứng suất tại A và B mang dấu âm vì các điểm A và B nằm ở phía trái trục τ. Ứng suất chính là σ_2 và σ_3 vì trị số $\sigma_1 = 0$.

Giá trị của ứng suất tiếp chính là bản kính của vòng Mo:

$$\tau_{max} = CI = .\ 225\ MN/m^2$$

$$\tau_{min} = CJ = -225\ MN/m^2$$

Góc giữa phương chính thứ hai và trục x ký hiệu là α_2. Trên hình vẽ ta có:

$$tg\alpha_2 = \frac{FP}{FA} = \frac{FP}{OF - OA} = \frac{200}{400 - 75} = 0{,}61$$

$$\alpha_2 = 31^o30'$$

Thấy ngay rằng góc giữa phương chính thứ ba và trục x sẽ là:

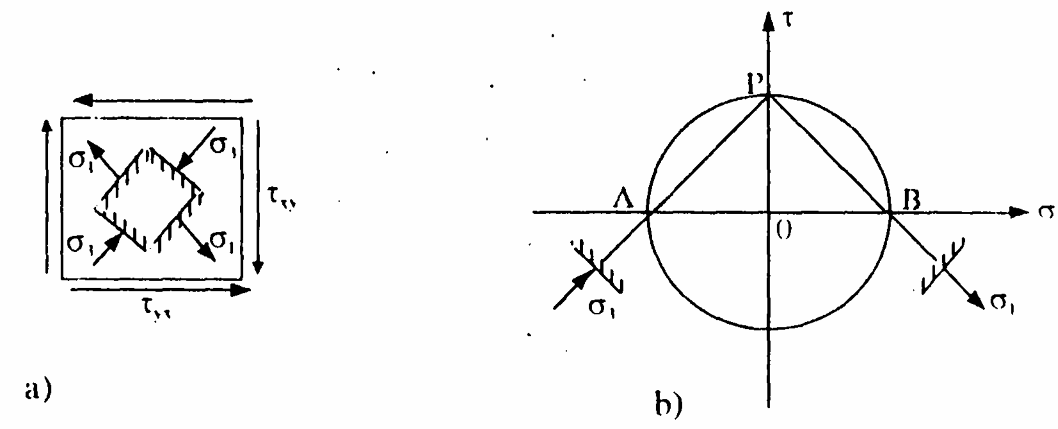
$$\alpha_2 = 31^o30' + 90^o = 121^o31'$$

4- Sự trượt thuần tuý.

Nếu trên mặt cắt của phân tố chỉ tồn tại các ứng suất tiếp còn ứng suất pháp bằng không thì ta nói trạng thái ứng suất thể hiện bởi phân tố là trạng thái trượt thuần tuý. Đó là một dạng đặc biệt của trạng thái ứng suất phẳng. Trạng thái này xuất hiện khi nghiên cứu bài toán xoắn thuần tuý hoặc bài toán uốn ngang phẳng các thanh thẳng.

Vì: $\sigma_x = \sigma_y = 0$ nên vòng Mo ứng suất sẽ có tâm trùng với gốc toạ độ.

Vị trí của điểm cực P tuỳ thuộc vào dấu của ứng suất tiếp τ_{xy} trên hình (37b) thấy rằng các phương chính sẽ tạo với trục x các góc 45^o và 135^o.



Hình 37

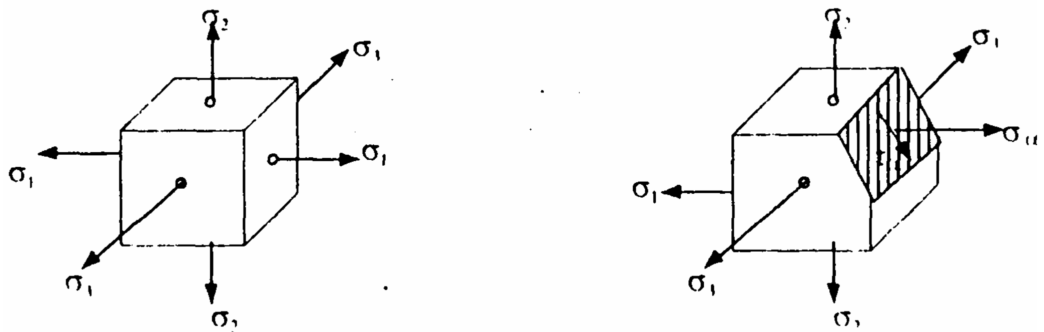
Các ứng suất chính sẽ có giá trị: $\sigma_1 = |\sigma_3| = \tau_{xy}$

Phân tố chính được biểu diễn trên hình (37a).

§3- TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT KHỐI

I. ỨNG SUẤT TRÊN MẶT CẮT XIÊN.

Trong phần này, ta sẽ chỉ khảo sát những mặt cắt xiên có tính chất đặc biệt. Đó là các mặt cắt song song với một phương chính thứ ba.



Hình 38

Ứng suất trên mặt cắt xiên này chỉ gồm có hai thành phần σ_α và τ_α trong đó thành phần τ_α nằm trong mặt phẳng vuông góc với phương chính thứ ba.

Ứng suất chính σ_3 chiếu lên phương của σ_α và τ_α sẽ triệt tiêu vì vậy dù vị trí của mặt cắt thế nào đi chăng nữa ta vẫn không cần chú ý đến σ_3. Điều này cho phép ta có thể sử dụng công thức (3-2) để tính các trị số σ_α và τ_α.

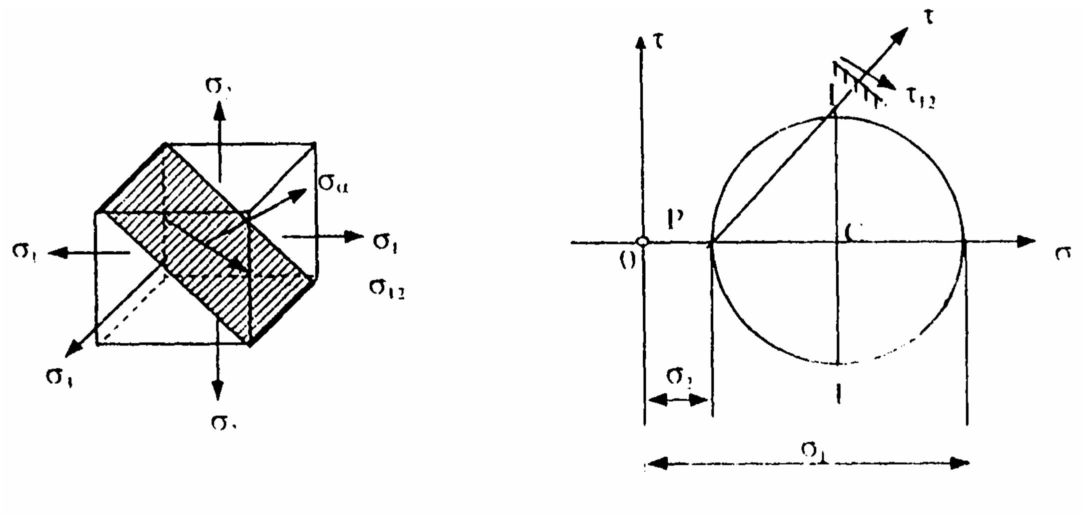
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha$$

τ_α sẽ đạt cực đại khi $\alpha = 45^o$ tức là khi mặt cắt xiên trùng với mặt chéo chính của phân tố. Ta ký hiệu trị số ứng suất tiếp cực đại là τ_{12}.

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad (3.9)$$

Vòng Mo ứng suất trường hợp này sẽ đi qua các điểm có hoành độ là σ_1 và σ_2 (hình 3.9b).



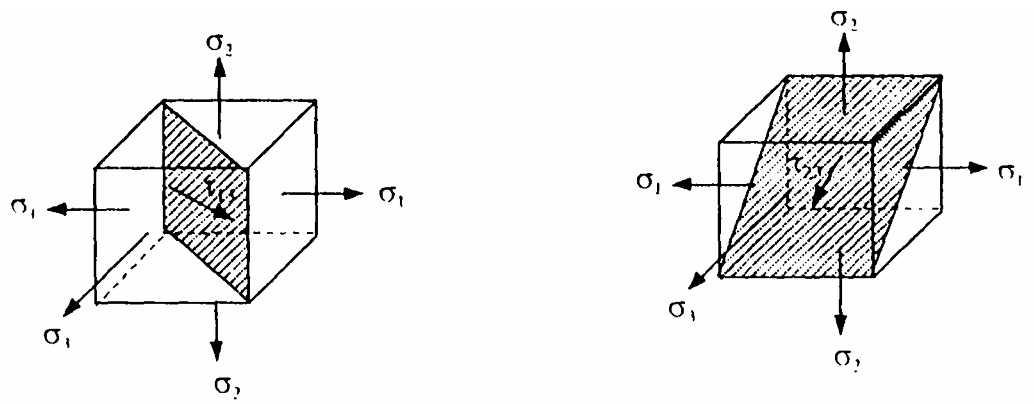
Hình 39

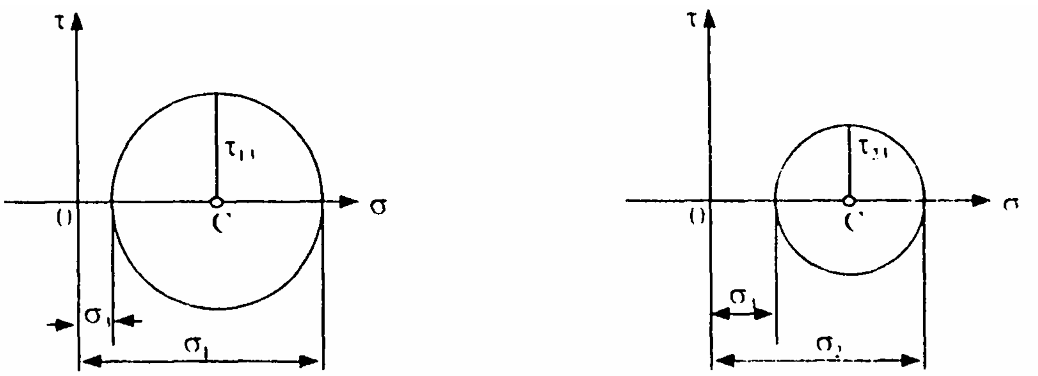
Với những mặt cắt song song với phương I ứng suất trên mặt cắt xiên vẫn áp dụng theo công thức (3.2) nhưng thay vào trị số σ_1 là trị số σ_3. Ứng suất tiếp cực đại trong trường hợp này.

$$\tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \qquad (3.10)$$

Vòng Mo ứng suất sẽ đi qua các điểm có toạ độ là σ_2 và σ_3

Việc khảo sát các mặt cắt xiên song song với phương chính thứ II cũng tiến hành tương tự, tương ứng với các mặt cắt xiên ta vẽ được ba vòng Mo ứng suất (hình 40a). Lý thuyết đàn hồi đã chứng minh được rằng toạ độ của một điểm nằm trong vùng giới hạn của ba vòng tròn đó sẽ cho ta giá trị ứng suất trên một mặt cắt xiên bất kỳ nghĩa là mặt cắt xiên không song song với một phương chính nào.

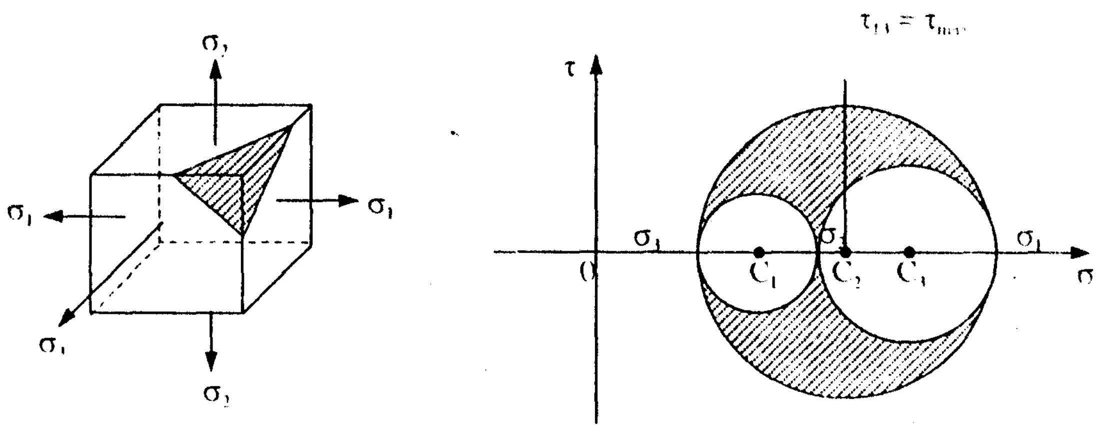




Hình 40

Vì không thể lấy các điểm nằm ngoài phạm vi giới hạn của ba vòng trên tròn cho nên dễ dàng thấy rằng trị số ứng suất tiếp cực đại đối với một trạng thái sẽ là:

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \qquad (3.11)$$



Hình 41

II. LIÊN HỆ GIỮA ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

1. Định luật Húc tổng quát.

Trong chương 2 ta đã xây dựng công thức tính biến dạng tỷ đối trọng phạm vi giới hạn đàn hồi.

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \qquad a)$$

Liên hệ giữa biến dạng dọc ε_z và biến dạng ngang có ε_x, ε_y đã xây dựng:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu\,\varepsilon_z. \qquad b)$$

Ký hiệu biến dạng theo phương I do σ_1, σ_2, σ_3 gây ra tương ứng là ε_{11}, ε_{12}, ε_{13}. Áp dụng các công thức a vào b ta có:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}\ ;\ \ \varepsilon_{12} = -\mu\frac{\sigma_2}{E};\ \ \varepsilon_{13} = -\mu\frac{\sigma_3}{E}$$

Áp dụng nguyên lý ứng tác dụng ta sẽ có biến dạng theo phương I do đồng thời tác dụng σ_1, σ_2, σ_3 gây ra:

$$\varepsilon_I = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \qquad (3.12a)$$

Tương tự ta có:

$$\varepsilon_{II} = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)\right] \qquad (3.12b)$$

$$\varepsilon_{III} = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right] \qquad (3.12c)$$

- Các biểu thức liên hệ giữa ứng suất và biến dạng (3.12a. b. c) được gọi là biểu thức của định luật Húc tổng quát. Biểu thức trên vẫn đúng trong trường hợp ta khảo sát phân tố bất kỳ, nghĩa là:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (3.13)$$

Các ứng suất tiếp không làm thay đổi dạng các công thức (2.12) vì chúng không ảnh hưởng đến biến dạng dài.

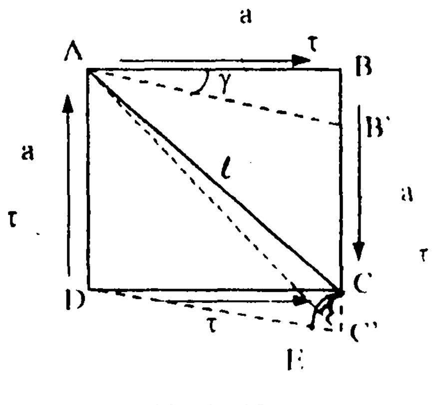
<u>2- Định luật Húc trượt.</u>

Trong phạm vi giới hạn đàn hồi tương quan giữa góc trượt γ và ứng suất tiếp τ cũng là tương quan bậc nhất.

$$\tau = G.\gamma \qquad (2.14)$$

Trong đó:

G là hệ số tỷ lệ và được gọi là môdyn đàn hồi khi trượt. Trị số G được xác định từ thực nghiệm. Thứ nguyên của C cung giống như E. Với mỗi loại vật liệu các modun đàn hồi E, G, và hệ số poát xông μ là hằng số. Ta sẽ tìm biểu thức liên hệ giữa ba đại lượng này.



Hình 42

Dưới tác dụng của ứng suất τ góc trượt của phân tố là γ. Từ C hạ đoạn CE vuông góc với đoạn AC

Đặt: $CC' = \Delta S$; $C'E = \Delta \ell$

$AC = \ell = a/\cos 45^o$

Trên hình vẽ ta có: $\Delta \ell = C'E = \Delta S \cos 45^o$

Biến dạng dài tỷ đối theo phương AC.

$$\varepsilon_{AC} = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\Delta S}{a}\cos^2 45^o = \frac{\Delta S}{2a} \qquad a)$$

Mặt khác ta có: $$\operatorname{tg}\gamma \approx \gamma = \frac{\Delta S}{a} \qquad b)$$

Từ a) và b) suy ra: $$\varepsilon_{AC} = \frac{\gamma}{2} \qquad c)$$

Trong phần trượt thuần tuý ta đã có ứng suất trích phương AC là $\sigma_1 = \tau$ và theo phương BD là $\sigma_3 = -\tau$. Còn ứng suất chính $\sigma_2 = 0$

Áp dụng định luật Húc tổng quát, chọn phương AC là phương I ta có:

$$\varepsilon_{AC} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$= \frac{1}{E}(\tau + \mu\tau) = \frac{\tau}{E}(1 + \mu) \qquad d)$$

Từ (c) và (d) suy ra: $$\frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{E}(1 + \mu)$$

$$\tau = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \gamma \qquad e)$$

So sánh (e) và (3.14) suy ra: $$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \qquad (3.15)$$

§4. THẾ NĂNG, BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI.

Trong chương II, ta đã tính được thế năng biến dạng đàn hồi trong trạng thái ứng suất đơn.

$$U = \frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon$$

Đối với trạng thái ứng suất khối áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có:

$$U = \frac{\sigma_1\varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2\varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3\varepsilon_3}{2} \qquad (3.16)$$

Mang biểu thức ε_1, ε_2, ε_3 theo (3.12) vào (3.16) ta có:

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right] \quad (3.17)$$

Người ta thường tách thế năng U thành hai thành phần, một phần có tác dụng luôn thay đổi hình dạng vật thể gọi tắt là thế năng biến đổi hình dạng ký hiệu là $U_{hd.}$ Một phần có tác dụng làm thay đổi thể tích vật thể gọi là thế năng biến đổi thể tích, ký hiệu là U_{tt}.

$$U = U_{hd} + U_{tt}$$

Ta có thể chứng minh được:

$$U_{hd} = \frac{1+\mu}{3E}\left([\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right) \quad (3.18)$$

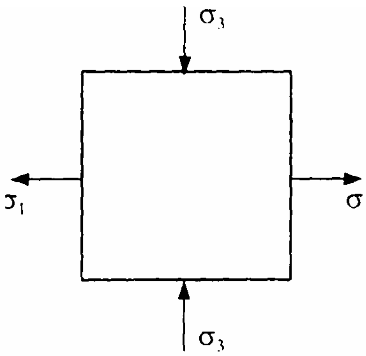
$$U_{tt} = \frac{1-2\mu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2 \quad (3.19)$$

§5. CÁC THUYẾT BỀN.

I. Ý NGHIÃ CỦA VIỆC SỬ DỤNG CÁC THUYẾT BỀN.

Trong các biểu thức kiểm tra bền đã biết, muốn xác định được ứng suất cho phép ta phải xác định ứng suất nguy hiểm từ thực nghiệm, thông thường là từ thí nghiệm kéo, nén đơn. Từ đó đưa ra công thức kiểm tra:

$$\sigma_{max} \le [\sigma]_k \; ; \qquad \sigma_{min} \le [\sigma]_n \; ; \qquad \tau_{max} \le [\tau]$$



Hình 43

Đối với trạng thái ứng suất khối hoặc phẳng việc lựa chọn trị số nào đưa vào công thức kiểm tra đều không có cơ sở. Ví dụ trên phân tố hình 43, vật liệu của chi tiết là vật liệu dòn.

Trị số tuyệt đối của σ_1 có thể nhỏ hơn σ_3 nhưng vì vật liệu dòn chịu kéo kém nên mức độ nguy hiểm theo phương I có thể lại lớn hơn theo phương III. Do vậy chưa thể kết luận đưa σ_1 hay σ_3 và công thức kiểm tra.

Mặt khác việc lựa chọn ứng suất nguy hiểm cho trạng thái ứng suất phẳng hoặc khối là không thể làm được vì sự phá huỷ vật liệu xẩy ra dưới tác dụng tổng cộng của ứng suất theo mọi phương chứ không phải chỉ dưới tác dụng của ứng suất lớn nhất. Ngay cả trường hợp giả sử vật liệu bị phá huỷ do ứng suất lớn nhất đó, thì việc tạo nên các thiết bị thí nghiệm kéo, nén theo ba phương đồng thời, gặp phải những khó khăn chưa khắc phục được.

Vì những lý do đã nói, để kiểm tra bền cho trạng thái ứng suất phẳng hoặc khối chúng ta không thể dựa vào thực nghiệm mà phải đưa ra những giả thuyết làm cơ sở gọi là các thuyết án. Các giả thuyết này chỉ ra nguyên nhân cơ bản gây nên sự phá huỷ vật liệu và là có sở để xây dựng các công thức kiểm tra bền. Có nhiều thuyết bền khác nhau được đưa ra, mỗi thuyết chỉ áp dụng đúng cho một vài trường hợp thực tế và nói chung cho đến nay chưa có một lý thuyết tổng quát nào áp dụng đúng cho mọi bài toán.

Nội dung chung của mọi thuyết bền đều là ở chỗ tìm cách khảo sát trạng thái ứng suất phức tạp (phẳng hoặc khối) thông qua việc khảo sát trạng thái ứng suất dòn ta có định nghĩa sau:

"Hiai trạng thái ứng suất phức tạp và đơn gọi là tương đương nếu độ bền của vật liệu là như nhau không phụ thuộc vào tính chất tác dụng của ngoại lực".

Dưới đây ta sẽ khảo sát một số thuyết bền cơ bản.

II. THUYẾT BỀN ỨNG SUẤT TIẾP CỰC ĐẠI

Theo thuyết này, nhân tố duy nhất ảnh hưởng đến độ bền của vật liệu là ứng suất tiếp. Nội dung của thuyết này tóm tắt như sau:

"Hai trạng thái ứng suất phức tạp và đơn sẽ ảnh hưởng đến độ bền của vật liệu như nhau, nếu ứng suất tiếp lớn nhất của chúng là như nhau"

Như vậy nếu ứng suất tiếp lớn nhất của trạng thái ứng suất phức tạp vẫn còn nhỏ hơn ứng suất tiếp nguy hiểm của trạng thái ứng suất đơn thì vật liệu vẫn thoả mãn điều kiện bền.

Giả sử khi làm việc dưới tác dụng của ngoại lực ứng suất chính trong phân tố là σ_1, σ_2, σ_3. Gọi ứng suất chính trên phân số ở trạng thái nguy hiểm là σ'_1, σ'_2, σ'_3 . Hệ số dự trữ hay cũng gọi là hệ số an toàn trong trường hợp này, ký hiệu là n với n > 1.

Ta có các liên hệ:
$$n = \frac{\sigma'_1}{\sigma_1} = \frac{\sigma'_2}{\sigma_2} = \frac{\sigma'_3}{\sigma_3} \qquad a)$$

Như đã biết trong §31, công thức (3.12), ứng suất tiếp nguy hiểm:

$$\tau'_{max} = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} \qquad b)$$

Đối với trạng thái ứng suất đơn, ứng suất tiếp nguy hiểm đạt được trên các mặt cắt tạo với phương chính một góc 45^o và có trị số.

$$\tau_o = \frac{\sigma_o}{2} \qquad c)$$

Điều kiện bền theo thuyết ứng suất tiếp cực đại sẽ là:

$$\tau'_{max} \le \tau_o$$

Kết hợp a), b), c), suy ra điều kiện bền này:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \le \frac{\sigma_o}{n} \qquad (3.20)$$

Đặt: $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{td}$ gọi là ứng suất tương đương và $\frac{\sigma_o}{n} = |\sigma|$.

Ta có: $\sigma_{td} \le |\sigma|$ (3.20')

III. THUYẾT BỀN THẾ NĂNG BIẾN ĐỔI HÌNH DẠNG CỰC ĐẠI

Thuyết này cho rằng vật liệu sẽ bị phá huỷ hết nếu thế năng biến đổi hình thành dạng lớn hất của phân tố ở trạng thái phức tạp đạt đến trị số bằng thế năng biến đổi hình dáng nguy hiểm của phân tố ở trạng thái ứng suất đơn.

Sở dĩ người ta không chú ý đến thế năng biến đổi thể tích vì nhiều loại vật liệu đặc biệt là chất lỏng như nước, dầu,... Áp lực tác dụng rất lớn nhưng thể tích của chúng hầu như không bị thay đổi. Các loại vậl liệu dòn cũng có đặc tính như vậy. Với các loại vật liệu dẻo thực nghiệm cho thấy rằng, khi hệ số poát xông càng lớn thì sự thay đổi thể tích càng nhỏ. Với thép hệ số μ = 2.5 khi chịu túc dụng lực.

Gọi U_{hd} là thế năng biến đổi hình dạng của trạng thái ứng suất phức tạp trong trường hợp nguy hiểm và gọi thế năng biến đổi hình dáng U'_{hd} vật liệu bị phá huỷ ở trạng thái ứng suất đơn. Từ nội dung của thuyết bền ta có công thức kiểm tra:

$$U_{hd} \le U^*_{hd} \qquad (3.21)$$

Biểu thức của U_{hd} được tính theo (3.18), còn biểu thức U^*_{hd}

Được suy ra từ (3.18) trong đó thành phần ứng suất duy nhất là σ_o và đóng vai trò là σ_1 nếu σ_o là ứng suất kéo hoặc đóng vai trò σ_3 nếu σ_o là ứng suất nén. Ta có thể viết theo công thức (3.21).

$$\frac{1+\mu}{3E}(\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2 - \sigma_1'\sigma_2' - \sigma_2'\sigma_3' - \sigma_2'\sigma_1')$$

$$\le \frac{1+\mu}{3E}\sigma_o^2 \text{ và từ } \sigma_1^2 = n\sigma_1\ ;\ \sigma'_2 = n\sigma_2\ ;\ \sigma'_3 = n6_3$$

Ta có suy ra:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \le \frac{\sigma_o}{n} \qquad (3.22)$$

Để cho gọn ta đặt vế trái của (3.22) là σ_{td} còn vế phải cũng như trong chương II đặt là [σ]. Ta lại đặt về được dạng (3.20') đã biết.

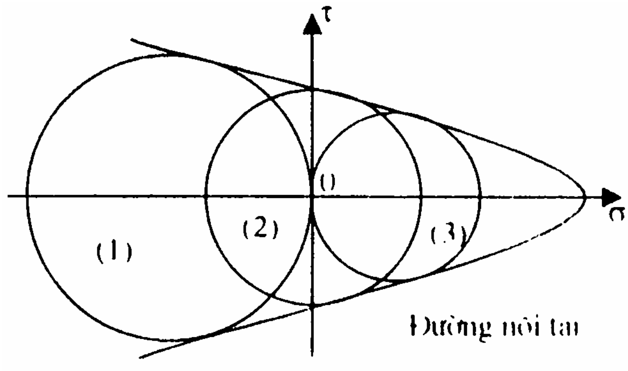
IV. THUYẾT BỀN MO

Thuyết bền này còn được gọi là thuyết bền về trạng thái ứng suất giới hạn, nó dựa vào việc khảo sát trạng thái ứng suất bền trong vật liệu, khi vật liệu làm việc ở trạng thái giới hạn. Để phân định rõ đâu là trạng thái làm việc, đâu là trạng thái giới hạn, người ta thường phải dựa vào trạng thái cơ học vật liệu. Đối với vật liệu dẻo trạng thái ứng suất giới hạn xuất hiện khi vật xuất hiện biến dạng dẻo. Còn với vật liệu dòn, trạng thái ứng suất giới hạn khi vật liệu bị phá huỷ.

Để xây dựng biểu thức $\sigma_{tđ}$ theo thuyết Mo, chúng ta đưa vào các vòng Mo giới hạn.

Như đã biết, với mỗi trạng thái ứng suất ta vẽ được ba vòng Mo. Khi vật thể làm việc trong trạng thái giới hạn, nghĩa là khi các ứng suất chính trên phân tố đạt đến trị số σ'_1, σ'_2, σ'_3, thì các vòng Mo được gọi tương ứng là các vòng tròn giới hạn. Trong đó vòng Mo lớn nhất có bán kính là τ_{13} được gọi là vòng tròn chính giới hạn, vòng tròn này đi qua các điểm σ'_1 và σ'_3 khi thay đổi tính chất tác động của ngoại lực, ta sẽ làm thay đổi các ứng suất chính giới hạn, do đó sẽ làm thay đổi vòng tròn chính giới hạn.

Tiến hành vô số thí nghiệm với cùng một vật thể, ta sẽ có được vô số phân tố chính, tại cùng một điểm khảo sát và kèm theo ta sẽ có vô số vòng tròn chính. Hình bao của hệ vòng tròn chính này là một đường cong hở gọi là đường nội tại (hình 44).

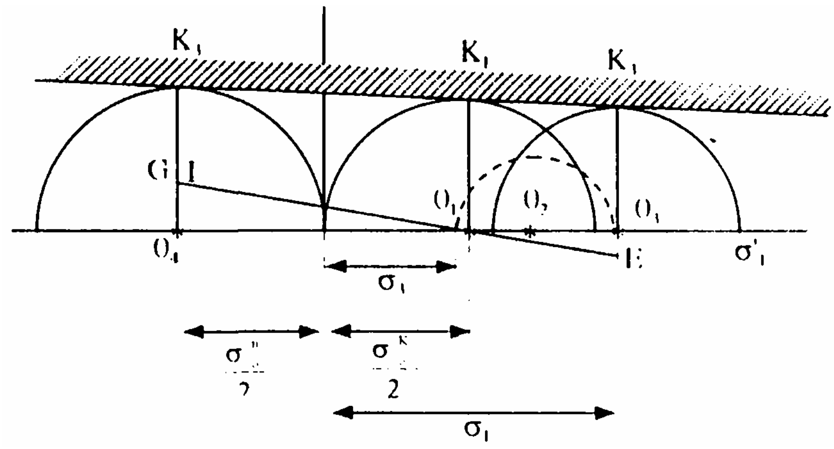


Hình 44

Đường nội tại chia mặt phẳng thành hai phần. Phần trong chứa gốc toạ độ và phần ngoài. Những trạng thái ứng suất nào có vòng tròn chính nằm ở phần trong đường nội tại thì vật liệu làm việc an toàn. Còn nếu vòng tròn chính tiếp xúc đường nội tại thì vật liệu ở trạng thái nguy hiểm.

Trên hình 44 vẽ ba vòng tròn chính cho ba trường hợp điển hình là vòng số 1 và 3 ứng với các trường hợp kéo và nén phá hỏng vật liệu. Vòng số 2 ứng trường hợp xoắn thuần tuý.

Để giảm bớt thí nghiệm ta chỉ cần xác định vòng số 1 và 3 đồng thời thay đường nội tại bằng hai đường thẳng tiếp tuyến của hai vòng tròn đó. Để xây dựng biểu thức ứng suất $\sigma_{tđ}$. Ta dựa vào sự liên hệ giữa ứng suất giới hạn về kéo và nén (σ_{ok} và σ_{oH}) với ứng suất giới hạn của trạng thái phức tạp bất kỳ.



Hình 45

Giả sử khi làm việc bình thường vòng tròn chính của trạng thái ứng suất có tâm 0_2 (vòng tròn nét đứt) và vòng tròn chính giới hạn tương ứng có tâm 0

Từ hình vẽ ta có $\sigma'_1 = n\sigma_1$ và $\sigma'_3 = n\sigma_3$ (a)

Trong đó n 1à hệ số tỷ 1ệ n > 1.

Qua 0_1 kẻ đường song song đường giới hạn cắt bán kính 0_3K_3 ở E cắ bán kính K_40_4 ở G. Xét hai tam giác đồng dạng 0_1G0_4 và $0E0_3$

Ta có: $$\frac{0_10}{0_10_4} = \frac{B_1E}{0_4G} \qquad (b)$$

hay có thể viết: $$\frac{00_3 - 00_1}{00_1 + 00_1} = \frac{H_3E - 0_3K_1}{0_4R_4 - GK_1}$$

Thay giá trị các đoạn thẳng vào ta có:

$$\frac{\dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2}-\dfrac{\sigma_0^k}{2}}{\dfrac{\sigma_0^k}{2}+\dfrac{|\sigma_0^n|}{2}}=\frac{\dfrac{\sigma_0^k}{2}-\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}}{\dfrac{|\sigma_0^n|}{2}+\dfrac{|\sigma_0^k|}{2}} \qquad (c)$$

Áp dụng quan hệ đẳng thức: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$ vào (c) và rút gọn ta được:

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_0^k}{\sigma_0^n}\sigma'_3 = \sigma_0^k \qquad (d)$$

Mang (d) vào (a) và đặt $\frac{\sigma_0^k}{\sigma_0^n} = K \Rightarrow \sigma'_1 - K\sigma'_3 = \frac{\sigma_0^k}{n}$

Gọi $\sigma'_1 - K\sigma'_3 = \sigma_{td}$ và $\frac{\sigma_0^k}{n} = [\sigma_K]$ cho ta công thức kiểm tra bằng thuyết bền Mo.

$$\sigma_{td} = \sigma'_1 - K\sigma'_3 \le [\sigma_K] \qquad (3\text{-}23)$$

Trong đó: K là hệ số tỷ lệ phụ thuộc vật liệu.

Vật liệu dẻo K = 1 còn vật liệu dòn : $K = \frac{\sigma_b^k}{\sigma_b^n}$

V. ƯU NHƯỢC ĐIỂM VÀ PHẠM VI SỬ DỤNG CỦA CÁC THUYẾT BỀN

Ngoài ba thuyết bền đã nêu trong tính toán đôi khi người ta còn sử dụng các thuyết khác như thuyết ứng suất pháp cực đại, thuyết biến dạng dài cực v.v… Nhìn chung các thuyết này đều đưa ra một công thức tính phần đúng và những công thức ấy cũng chỉ sử dụng được cho một số trường hợp cụ thể. Việc bỏ thành hhần ứng suất chính σ_2. Trong thuyết ứng suất tiếp và thuyết Mo cũng như bỏ qua thế năng biến đổi thể tích trong thuyết thế năng là những ngược điểm chưa khắc phục được nó làm giảm độ tin cậy của các kết quả tính toán. Tuy nhiên cũng phải thấy rằng thực chất các thuyết bền đã đáp ứng được yêu cầu bức thiết cuả kỹ thuật, đòi hỏi phải khảo sát các trạng thái ứng suất phức tạp.

So sánh giữa ba thuyết đã nêu ta thấy rằng ứng suất tiếp lớn nhất dùng phổ biến cho vật liệu dẻo vì vật liệu dẻo chịu kéo và nén tốt còn chịu cắt 1à kém nhất mà ứng suất tiếp cũng là nguyên nhân gây nên hiện tượng cắt vật liệu. Thuyết thế năng cũng được dùng phổ biến cho vật liệu dẻo sử dụng thuyết bền này ta không thể giải thích được tại sao mẫu chịu nén đều theo ba phương thì không bị phá huỷ. Trong trường hợp này các ứng suất chính có trị số như nhau, do đó thế năng biến đổi hình dáng tính theo (3.18) bằng không do vậy vật liệu không bị phá huỷ.

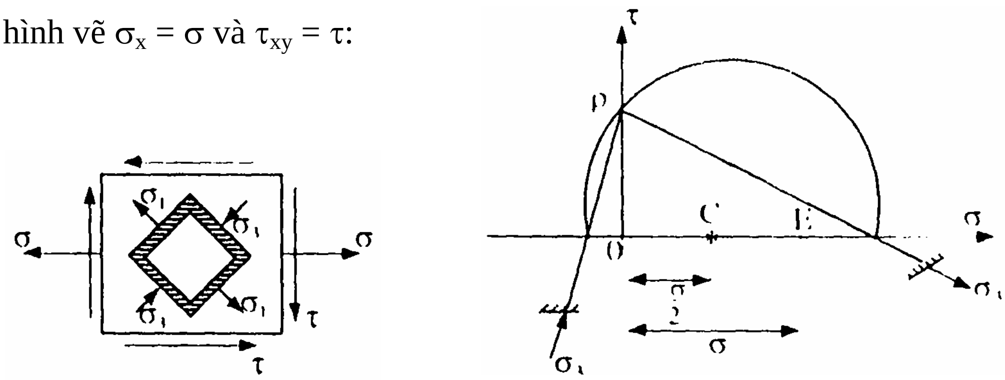
Thuyết bền Mo tuy đã không chú ý đến σ_2, và xem đường nội tại là đường thẳng, song nó có ưu điểm là không cần phải dựa vào giả thuyết nguyên nhân phá huý vật liệu, quá trình lại mang tính logic chặt chẽ. Lý thuyết dùng phù hợp với những vật liệu dòn nó khá chính xác nếu vòng chính giới hạn của trạng thái ứng suất đang giữa khoảng hai vòng tròn giới hạn về kéo và nén. Để bảo đảm kết quả tính toán chính xác, phải nắm vững trạng thái cơ học của vật liệu khi làm việc. Từ đó áp dụng thuyết bền hoặc kết hợp các thuyết bền để tính toán kiểm nghiệm. Đối với những loại vật liệu mới đặc biệt là các vật liệu tổng hợp. Trạng thái ứng suất của chúng thường là trạng thái phức tạp đòi hỏi người thiết kế càng phải nắm vững các phương pháp tính toán cũng như cấu trúc vật liệu mới có thể tránh khỏi các thiếu sót đáng tiếc.

§6 - ÁP DỤNG CÁC THUYẾT BỀN

Để giúp cho việc tính toán trong các chương uốn ngang phẳng và xoắn thuần tuý, chúng ta sẽ sử dụng các thuyết bền lập công thức kiểm tra cho hai trạng thái ứng suất thường gặp là phẳng đặc biệt và trượt thuần tuý.

1- Phân tố ở trạng thái phẳng đặc biệt.

Trên hình vẽ $\sigma_x = \sigma$ và $\tau_{xy} = \tau$:



Hình 4-6

Bằng vòng Mo ta tìm được các ứng suất chính

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \\ \sigma_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}24)$$

Mang (3-24) thay vào các biểu thức $\sigma_{tđ}$ của ba thuyết bền.

Ta có: * Thuyết ứng suất tiếp:

$$\sigma_{tđ} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

* Thuyết thế năng

$$\sigma_{tđ} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

* Thuyết Mo

$$\sigma_{tđ} = \sigma_1 - K\sigma_3 = \frac{1-K}{2}\sigma + \frac{1+K}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

2- Phân tố ở trạng thái trượt thuần tuý.

Ta đã biệt các ứng suất chính $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = 0$; $\tau_3 = -\tau$

Biểu thức $\sigma_{tđ}$ cho trường hợp trượt thuần tuý là:

* Thuyết ứng suất tiếp: $\sigma_{tđ} = 2\,\tau_{max}$

* Thuyết thế năng: $\sigma_{tđ} = \sqrt{3}\,\tau_{max}$

* Thuyêt Mo: $\sigma_{tđ} = (1-K)\,\tau_{max}$

CHƯƠNG 4
ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MẶT CẮT NGANG

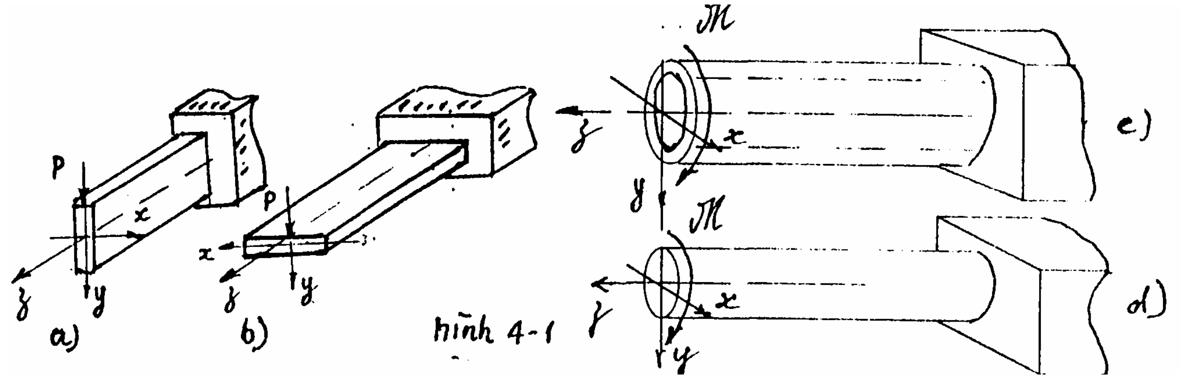
§1- KHÁI NIỆM

Khi nghiên cứu sự chịu lực trong bài toán kéo nén đúng tâm. Xét các công thức:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} \text{ và } \Delta\ell = \frac{N_z.\ell}{EF}$$

Ta thấy ứng suất và biến dạng của thanh chỉ phụ thuộc vào một đặc trưng hình học là diện tích F của mặt cắt ngang. Nhưng khi xét các bài toán uốn, xoắn,... Thì sự chịu lực của thanh còn phụ thuộc vào hình dáng của diện tích và vị trí, phương tác dụng của lực đối với mặt cắt ngang.

Thí dụ ta xét các trường hợp chịu lực trên hình 4-1. Bằng trực giác ta cũng dễ đàng thấy trường hợp (a), (c) sự chịu lực tốt hơn (b), (d).



Chính điều này cho thấy ngoài diện tích F, ta còn cần có những đại lượng khác, đặc trưng cho hình dáng hình học của mặt cắt ngang.

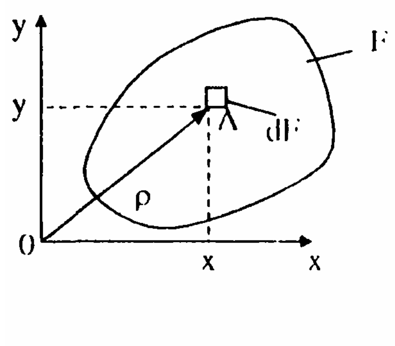
§2- MÔMEN TĨNH - CÁC MÔMEN QUÁN TÍNH.

Giả sử có mặt cắt ngang F xác định trong hệ toạ độ oxy và gọi toạ độ của một điểm A nào đó trong diện tích F là x, y. Lấy xung quanh A một phân tố diện tích dF.

1 - Mômen tĩnh:

Gọi mômen tĩnh của diện tích F đối với trục x hay y là các biểu thức tích phân sau:

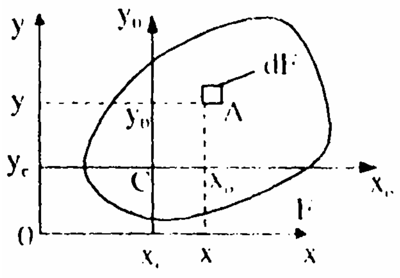
$$S_x = \int_F y\,dF \;.\; S_y = \int_F x\,dF \qquad (4\text{-}1)$$



Hình 4-2

- Thứ nguyên của mômen tính là (chiều dài)^3

- Vì x y có thể âm, dương nên mômenl tĩnh có thể có trị số âm hoặc dương (hình 4-3).



Hình 4-3

- Khi mômen tĩnh của diện tích F đối với một trục nào đó bằng không, thì trục đó được gọi là trục trung tâm. Giao điểm của hai trục trung tâm được gọi là trung tâm mặt cắt.

Từ định nghĩa này ta dễ dàng thiết lập được công thức xác định toạ độ trọng tâm của diện tích F với hệ trục xoy. Ta giả thiết có hai trục trung tâm cx_o và cy_o cắt nhau tại c và toạ thành hệ trục x_oc. y_o // xoy theo định nghĩa

$$S_{xo} = S_{yo} = 0 \qquad \text{(a)}$$

Gọi toạ độ trọng tâm C trong hệ xoy là x_o. y_o, và toạ điểm A trong hệ x_ocy_o là x_o, y_o. Ta lập được mối tương quan hình học là:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_o + x_c \\ y &= y_o + y_c \end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

Từ định nghĩa ta có:

$$S_x = \int_F y\,dF = \int_F (y_o + y_c)\,dF$$

$$S_y = \int_F x\,dF = \int_F (x_o + x_c)\,dF$$

Hay:

$$S_x = \int_F y_o dF + y_c \int_F dF = S_{xo} + y_c dF$$

$$S_y = \int_F x_o dF + x_c \int_F dF = S_{yo} + x_c dF \qquad \text{(c)}$$

Đem (a) Vào (c) ta có công thức xác định vị trí trung tâm của diện tích F:

$$y_c = \frac{S_x}{F} \quad ; \qquad x_c = \frac{S_y}{F} \qquad \text{(4-2)}$$

Với hình phức tạp được ghép bởi nhiều hình đơn giản ta có thể áp dụng (4-2) bằng cách chọn cho hình phẳng một hệ trục bất kỳ và từ (4-2) ta có:

$$\left.\begin{aligned} y_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} S_{xi}}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{y_{c1}.F_1 + y_{c2}.F_2 + \ldots + y_{cn}.F_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n} \\ x_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} S_{yi}}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{x_{c1}.F_1 + x_{c2}.F_2 + \ldots + x_{cn}.F_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(4-3)}$$

Trong đó:

- x_o^1, y_o^1 là toạ độ trong tâm toàn hình ghép, lấy với hệ trục ta chọn:

- y_{xn}, x_{cn} là khoảng cách từ trọng tâm hình đơn giản thứ n đến hệ trục ta chọn.

- F_n là phần diện tích hình đơn giàn thứ n.

Từ (4-2) ta thấy bất cứ trục nào qua trong tâm cũng là trục trung tâm.

2- Mômen quán tính đối với một trục: (mômen quán tính).

Ta gọi mômen quán tính của diện tích F với một trục x hay y là các biểu thức tích phân sau:

$$J_x = \int_F y^2 dF \;; \qquad J_y = \int_F x^2 dF \qquad (4\text{-}4)$$

Các mômen quán tính bao giờ cũng là một trị số dương chúng có thứ nguyên là (chiều dài)^4.

3- Mômen quán tính độc cực: (mômen quán tính đối với một điểm).

Ta gọi mômen quán tính độc cực của diện tích F đối với gốc toạ độ là biểu thức tích phân sau:

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF \qquad (4\text{-}5)$$

Trong đó ρ là khoảng cách từ điểm A (x, y) tới gốc toạ độ.

Từ liên hệ $\rho^2 = x^2 + y^2$ ta thấy ngay:

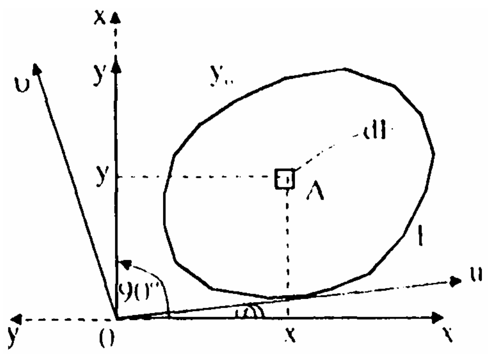
$$J_\rho = \int_F (x^2 + y^2)\, dF = J_x + J_y$$

Điều này chứng tỏ mômen quán tính độc cực bao giờ cũng có trị số dương.

4- Mômen quán tính ly tâm:

Ta gọi mômen quán tính ly tâm của diện tích F với hệ trục xoy là biểu thức tích phân sau:

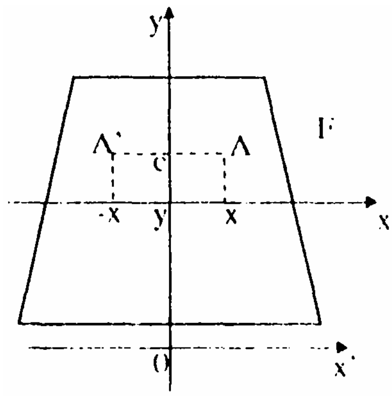
$$J_{xy} = \int_F xy\,dF \qquad (4\text{-}6)$$



Hình 4-4

Vì x, y có thể trái dấu nhau, thậm chí có thể bằng 0 do vậy mômen quán tính ly tâm có thể âm hoặc dương và khi mômen quán tính ly tâm của diện tích F với một hệ trục nào đó bằng không thì hệ trục đó được gọi là hệ trục quán tính chính.

Từ định nghĩa trên ta có nhận xét sau: Tại bất cứ điểm nào trên mặt phẳng của diện tích F ta luôn tìm được vị trí của hệ trục quán tính chính; thật vậy xét (hình 4-4) giả sử lúc đầu diện tích F nằm trong góc phần tử thứ nhất toạ độ điểm A (x, y) là dương, do đó mômen quán tính ly tâm có giá trị dương. Bây giờ ta quay hệ trục góc 90^o đến vị trí mới (trục vẽ nét đứt) để $x \equiv y$ còn $y \equiv$ chiều âm của trục x, lúc này hoành độ x của điểm A vẫn dương song tung độ của A lại âm. mômen quán tính ly tâm của diện tích F với xoy có giá trị âm. Như vậy khi thực hiện phép quay hệ trục góc 90^o, mômen quán tính ly tâm đã biến đổi từ dương sang âm, vậy chắc chắn ta tìm được tại vị trí $\alpha < 90^o$ nào đó khi thực hiện phép quay hệ trục xoy đến vị trí uoυ, mômen quán tính ly tâm của F với hệ trục uoυ là bằng không. Hệ trục này là hệ trục quán tính chính.



Hình 4-5

Hệ trục quán tính chính có gốc toạ độ tại trọng tâm c của mặt cắt được gọi là hệ trục quán tính chính trung tâm. Ta có tính chất sau đây. Nếu mặt cắt có một trục đối xứng thì bất cứ trục nào vuông góc với nó cũng lập thành một hệ trục quán tính chính thật vậy giả sử có mặt cắt ngang F với trục đối xứng y trên mặt cắt (hình 4-5) với một điểm A (x, y) ta luôn tìm thấy một điểm A'(x, y) vậy biểu thức tích phân:

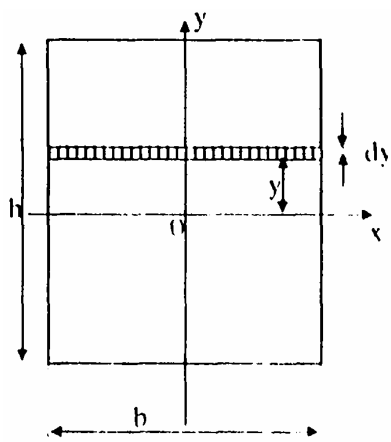
$$J_{xy} = \int_F xydF$$

Chính là phép tổng của những cặp: xydF - xydF: = 0

Do đó J_{xy} phải bằng không. Mặt khác trọng tâm c của F lại nằm trên trục y, qua c vẽ đường vuông góc với trục y ta sẽ có hệ trục quán tính chính trung tâm.

5- Mômen quán tính của một số hình đơn giản:

Để thuận tiện cho quá trình sử dụng ta sẽ đi tính mômen quán tính của một số hình đơn giản.



Hình 4-6

a) Hình chữ nhật.

Xét mặt cắt ngang, hình chữ nhật chiều rộng b và chiều cao h. Hệ trục xoy là hệ trục quán tính chính trung tâm. Tính các mômen quán tính đối với các trục của hệ trục đó (hình 4-6).

Lấy một giải phân tố diện tích dF song song trục x và cách trục một khoảng y. Chiều dầy dải phân tố là dy. Ta tính được mômen quán tính của diện tích F hình chữ nhật với trục x là:

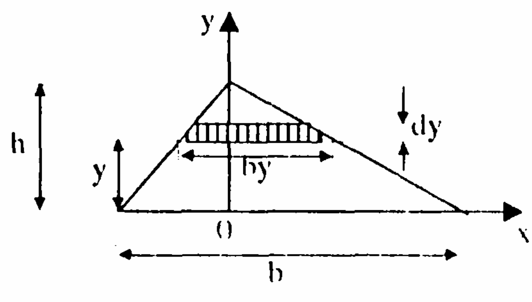
$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b\, dy = \frac{b}{3} y^3 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12} \qquad (4\text{-}7)$$

Tương tự ta có:

$$J_y = \frac{hb^3}{12} \qquad (4\text{-}7')$$

b) Hình tam giác:

Xét mặt cắt ngang hình tam giác chiều rộng b và chiều cao h. Ta tính trị số mômen quan tính của diện tích tam giác, đối với trục x đi qua đáy (hình 4-7). Lấy một giải phân tố diện tích dF song song đáy, có chiều dày dy cách trục x khoảng y. Giải phân tố rất nhỏ có thể coi là một hình chữ nhật đáy by. Từ điều kiện đồng dạng của các tam giác ta có:



Hình 4-7

$$\frac{by}{b} = \frac{h-y}{h} \quad \rightarrow \quad by = \frac{h-y}{h}\, b$$

Mômen quán tính diện tích tam giác đối với trục x là:

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_0^h \frac{h-y}{h}\, y^2 dy = \frac{b}{h}\int_0^h y^2(h-y)dy$$

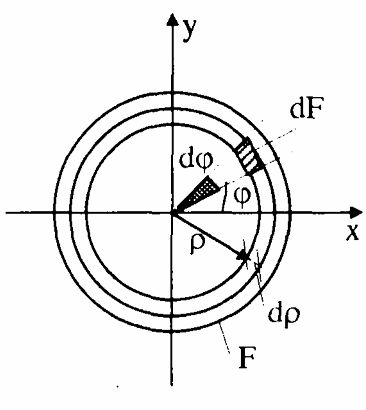
$$= \frac{b}{h}\left[h\int_0^h y^2 dy - \int_0^h y^3 dy = \frac{b}{h}\left[\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_o^h\right.$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12} \qquad (4\text{-}8)$$

c) Hình tròn:

Do tính chất đối xứng ta có $J_x = J_y$ do đó: $J_p = J_x + J_y = 2J_x = 2J_y$.

Để tính J_x, J_y ta đi tính J_p, lấy phân tố diện tích dF bằng cách dùng hai mặt cắt tròn đồng tâm bán kính ρ và ρ + dρ và hai mặt cắt tạo với trục x góc φ và φ + dφ trong đó φ và φ + dφ là số vô cùng bé. Ta được phân tố dF được gạch chéo (hình 4-8) giá trị dF = ρdφdp mômen quán tính độc cực của diện tích hình tròn với tâm là:



Hình 4-8

$$J_P = \int_F \rho^2 dF = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^2 \rho d\varphi d\rho$$

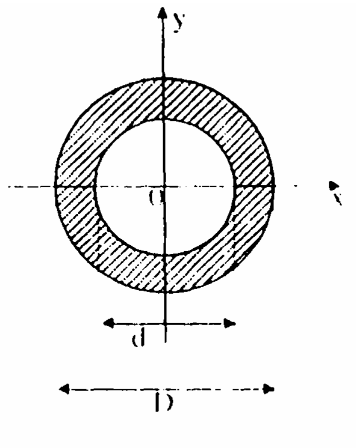
Trong đó: R là bán kính của hình tròn

Vậy: $J_P = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]\Big|_0^R \Rightarrow J_P = \frac{\pi R^4}{2}$ (4-8)

$$\Rightarrow J_x = J_y = \frac{J_P}{2} = \frac{\pi R^4}{4} \quad (4\text{-}9)$$

Gọi đường kính của vòng tròn là D ta có thể đưa các công thức (4-8) và (4-9) về dạng:

$$\left.\begin{aligned} J_P &= \frac{\pi D^4}{32} = 0{,}1\,D^4 \\ J_x &= J_y = 0{,}05\,D^4 \end{aligned}\right\} (4\text{-}10)$$



Hình 4-9

Đối với hình vành khăn, đường kính ngoài là D và đường kính trong d (hình 4-9). Ta có mômen quán tính độc cực với trong tâm 0 và mômen quán tính với các trục x, y.

$$J_P = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \eta^4) \quad (4\text{-}11)$$

$$J_x = J_y = \frac{J}{2} = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \eta^4) \quad (4\text{-}12)$$

Trong đó: $\eta = \frac{d}{D}$

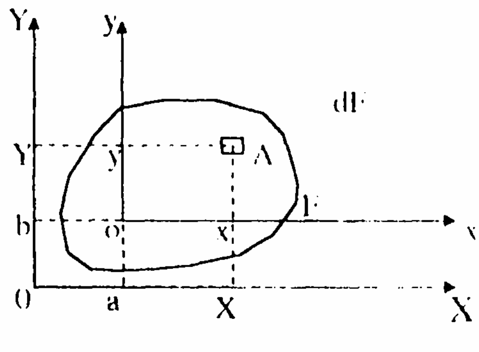
Gần đúng ta có thể viết: $J_P = 0{,}1\,D^4(1 - \eta^4)$ (4-11')

$J_x = J_y = 0{,}05\,D^4(1 - \eta^4)$ (4-12')

§4 - CÔNG THỨC CHUYỂN TRỤC SONG SONG CỦA MÔMEN QUÁN TÍNH

Trong thực tế ta thường gặp các chi tiết, bộ phận công trình mà tiết diện mặt cắt ngang được ghép bởi nhiều tiết diện đơn giản, tạo khả năng chịu lực tốt nhất. Tiết kiệm nhất. Điều này yêu cầu chúng ta phải biệt cách tính các loại mômen quán tính khi biết mômen quán tính của những hình đơn giản.

Giả sử ta biết mômen tĩnh và mômen quán tính của diện tích F đối với hệ trục xoy. Bây giờ phải tính các mômen quán tính của diện tích ấy với hệ trục OYX song song hệ oxy qua các giá trị mômen tĩnh và các mômen quán tính đã biết (hình 4- 10).



Hình 4-10

Gọi toạ độ của điểm A trong hệ oxy là

DXY// oxy là X, Y và toạ độ của gốc 0(oxy) trong hệ OXY là a, b. Ta có mối tương quan hình học

$$\left.\begin{aligned} X &= x + a \\ Y &= y + b \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Theo định nghĩa ta có:

$$J_X = \int_F Y^2 dF \quad ; \quad J_Y = \int_F X^2 dF \text{ và } J_{XY} = \int_F XY dF \quad (b)$$

Đem (a) thay lần lượt vào các biểu thức của (b) ta có:

$$J_X = \int_F (y + b)^2 dF = \int_F y^2 dF + 2b \int_F y dF + b^2 \int_F dF$$

$$J_Y = \int_F (x + b)^2 dF = \int_F x^2 dF + 2a \int_F x dF + b^2 \int_F dF$$

$$J_{XY} = \int_F (x + a)(y + b) dF = \int_F xy dF + a \int_F y dF + b \int_F x dF + ab \int_F dF$$

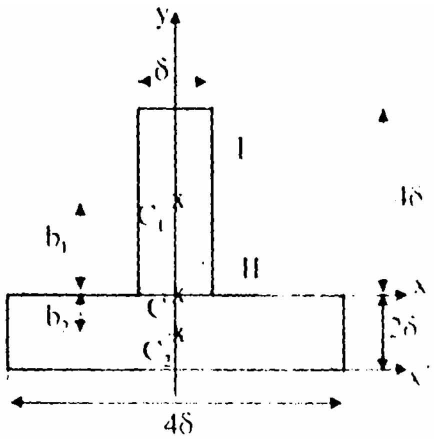
$$\text{Hay:} \quad \left.\begin{aligned} J_X &= J_x + 2bS_x + b^2F \\ J_Y &= J_y + 2aS_y + a^2F \\ J_{XY} &= J_{xy} + aS_x + bS_y + abF \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}13)$$

Đặc biệt nếu hệ trục xoy là hệ trục trung tâm ta có: $S_x = S_y = 0$

Do đó hệ công thức (4- 13) có dạng:

$$\left.\begin{aligned} J_x &= J_X - b^2F \\ J_y &= J_Y - a^2F \\ J_{xy} &= J_{XY} - abF \end{aligned}\right\} (4\text{-}14)$$

Điều này cho thấy các mômen quán tính với hệ trục trung tâm là nhỏ nhất.



Ví dụ: Hãy xác định trọng tâm thép mặt cắt 1 (hình 4- 11) và tính mômen quán tính lấy với trục x đi qua trọng tâm của hình ghép vuông góc trục y. Kích thước cho theo hình vẽ.

Để xác định trọng tâm hình ghép ta có nhận xét hình ghép nhận trục y là trục đối xứng do vậy trọng tâm chắc chắn phải nằm trên y. Ta chia hình thành hai hình nhỏ có trọng tâm là C_1 và C_2. Chọn và dựng một trục x bất kỳ vuông góc với trục y để đơn giản ta chọn trục x trùng cạnh đáy của hình 11. Áp dụng công thức xác định trọng tâm (4-3).

$$x_C = 0$$

$$y_C = \frac{\sum S_{xi}}{\sum F_i} = \frac{y_{C1}F_1 + y_{C2}F_2}{F_1 + F_2}$$

Thay số ta có: $$y_C = \frac{4\delta.4\delta^2 + \delta.8\delta^2}{4\delta^2 + 8\delta^2} = 2\delta$$

Trọng tâm toàn hình cách trục x' đoạn 2δ qua C vẽ trục x vuông góc với trục y. Ta tính J_x của toàn hình.

Áp dụng công thức chuyển trục song song cho trục x, từ các kết quả đã tính cho hình đơn giản ở phần trên ta được:

$$J_x = J_x^{(I)} + J_x^{(II)} \qquad (a)$$

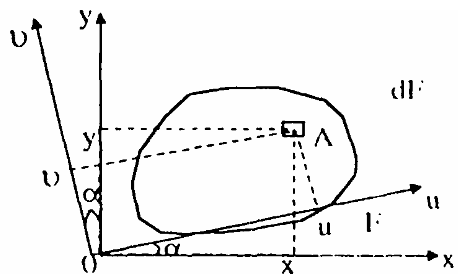
Trong đó: $$J_x^{(I)} = J_{xc1}^{(II)} + b^2{}_1F_1 = \frac{\delta(4\delta)^3}{12} + (2\delta)^2\,\delta.4\delta = \frac{64\delta^4}{3}$$

$$J_x^{(II)} = J_{xc2}^{(II)} + b^2{}_2F_2 = \frac{4\delta(4\delta)^3}{12} + \delta^2.2\delta.4\delta = \frac{32\delta^4}{3}$$

<u>Kết quả:</u> $$J_x = \frac{64\delta^4}{3} + \frac{32\delta^4}{3} = 32\delta^4$$

§5- CÔNG THỨC XOAY TRỤC CỦA MÔMEN QUÁN TÍNH HỆ TRỤC QUÁN TÍNH CHÍNH

Giả sử ta đã biết mômen quán tính của diện tích F đối với hệ trục xoy. Ta phải tính mômen quán tính của diện tích F với hệ trục ouυ là vị trí xoay đi của xoy ngược chiều kim đồng hồ góc α.



Gọi u, υ là toạ độ điểm A trong hệ trục ouυ từ phép quay ta có:

$$\left.\begin{aligned} u &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ \upsilon &= y\cos\alpha - x\sin\alpha \end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

Theo định nghĩa ta có:

$$J_u = \int_F \upsilon^2 dF = \int_F (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dF = \cos^2\alpha \int_F y^2 dF$$

$$- 2\cos\alpha \sin\alpha \int_F xydF + \sin^2\alpha \int_F x^2 dF$$

$$J_\upsilon = \int_F u^2 dF = \int_F (x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 dF = \cos^2\alpha \int_F x^2 dF$$

$$+ 2\cos\alpha \sin\alpha \int_F xydF + \sin^2\alpha \int_F y^2 dF$$

$$J_{xy} = \int_F u\upsilon dF = \int_F (x\cos\alpha + y\sin\alpha)(y\cos\alpha - x\sin\alpha) dF$$

$$= \cos^2\alpha \int_F xydF - \sin^2\alpha \int_F xydF + \sin\alpha\cos\alpha \int_F y^2 dF$$

$$- \sin\alpha\cos\alpha \int_F x^2 dF.$$

Hay:
$$J_u = J_x\cos^2\alpha + J_y\sin^2\alpha - 2J_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$$
$$J_\upsilon = J_y\sin^2\alpha + J_x\cos^2\alpha + 2J_{xy}\sin\alpha\cos\alpha$$
$$J_{u\upsilon} = J_{xy}\sin\alpha\cos\alpha - J_y\sin\alpha\cos\alpha + J_{xy}(\cos^2\alpha \sin^2\alpha)$$

Dùng các công thức lượng giác:

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\ ;\ \sin^2\alpha\ \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\ ;\ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

và $\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Thay vào hệ trên và rút gọn ta có:

$$\left.\begin{aligned} J_u &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha \\ J_\upsilon &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2\alpha + J_{xy}\sin 2\alpha \\ J_{u\upsilon} &= \frac{J_x - J_y}{2}\sin 2\alpha + J_{xy}\cos 2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}15)$$

Ta đem cộng hai phương trình đầu 4- 15 ta được:

$$J_u + J_\upsilon = J_x + J_y = \text{const}$$

Cho thấy tổng các mômen quán tính với hai trục vuông góc là một hằng số, gọi là bất biến thứ nhất của mômen quán tính.

Để tìm vị trí của hệ trục quán tính chính ta cho phương trình ba của hệ 4-15 bằng không.

$$J_{uv} = \frac{J_x - J_y}{2}\sin 2\alpha + J_{xy}\cos 2\alpha = 0$$

Vậy: $$tg2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} \qquad (4\text{-}16)$$

Thay giá trị tg2α từ (4- l6) vào hai phương trình đầu của 4-15 bằng biên đổi lượng giác.

$$\sin 2\alpha = \pm\frac{tg2\alpha}{\sqrt{1+tg^2 2\alpha}} \text{ và } \cos 2\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 2\alpha}}$$

Ta được các giá trị mômen với trục quán tính chính là:

$$\left.\begin{aligned} J_{max} &= \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} \\ J_{min} &= \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}17)$$

Các giá trị (4-l7) đạt cực trị vì ta có đạo hàm $\frac{dJ_u}{da} = 0$.

Xét vì phương diện toán học mối quan hệ J_u, J_{uv}, J_{xy}, J_x, J_y giống hệt mối quan hệ σ_α, τ_α, σ_α, τ_α, $\tau_{\alpha y}$ trong chương 3 ta cũng lập được một vòng tròn Mo quán tính cho chúng.

Chương 5
UỐN PHẲNG

PHẦN I - BIỂU ĐỒ NỘI LỰC

§1- CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN:

1- Ngoại lực uốn và dầm:

Uốn phẳng các thanh thẳng là trường hợp ngoại lực gây uốn nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm.

Các thanh có trục bị uốn cong dưới tác dụng của các ngoại lực như trên gọi là dầm chịu uốn (dầm).

Các ngoại lực gây uốn gồm:

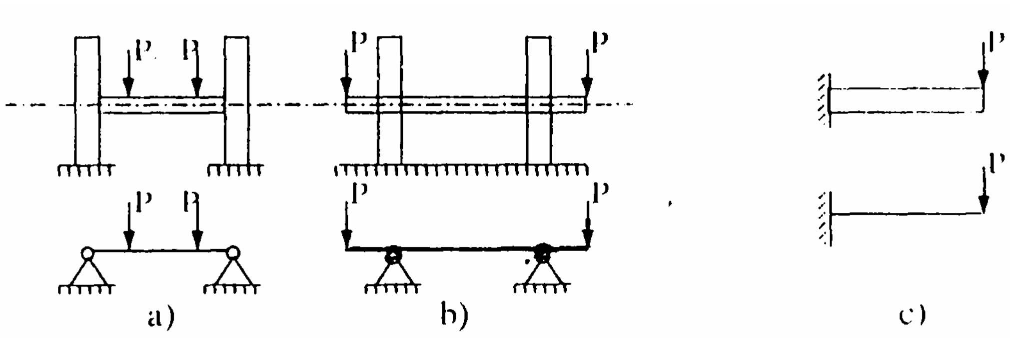
- Lực vuông góc với trục thanh (dầm): lực tập trung, 1lực phân bố

- Mômen uốn nằm trong mặt phẳng chứa trục thanh.

2- Phân loại dầm:

Có hai cách phân loại dầm:

a) Theo dạng liên kết có: dầm đơn giản (hình 5-1a); dầm có mút thừa (hình 5-1b), dầm công xôn (hình 5-1c).



Hình 5-1

b) Theo dạng mặt cắt ngang ta có:

Dầm mặt cắt không đổi (trục toa xe, trục máy,....), dầm có mặt cắt thay đổi (dầm cầu chạy trong cầu trục, trục bậc trong máy, lò xo nhíp ô tô,....)

Ở đây, chủ yếu chúng ta xét loại dầm có mặt cắt không đổi.

c) Khung chịu uốn:

Ngoài đối tượng chủ yếu là dầm, ở chương này ta cùng xét tới dạng khung chịu uốn. Đó là các khung phẳng chịu các loại ngoại lực như đối với dầm...

§2- NỘI LỰC VÀ BIỂU ĐỒ NỘI LỰC:

1- Nội lực uốn:

Nội lực trong dầm uốn phẳng bao gồm lực cắt Qy và mômen uốn Mx (có trường hợp chỉ có mômen uốn Mx).

Đối với khung chịu uốn nội lực còn thêm lực dọc Nz. Giống như chương kéo nén, nội lực trong dầm và khung chịu uốn được xác địnhh bằng phương pháp mặt cắt.

2- Biểu đồ nội lực:

Vấn đề chủ yếu để phục vụ cho việc tính toán bền là phải tìm các mặt cắt nguy hiểm trong dầm (khung) chịu uốn. Đó là các mặt cắt có trị số nội lực lớn nhất.

Muốn tìm trị số nội lực lớn nhất ta phải biết qui luật biến thiên của nội lực dọc theo trục thanh. Qui luật do được biểu diện dưới dạng biểu đồ nội lực.

Vậy: biểu đồ nội lực là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của nội lực dọc theo trục thanh trình tự vẽ biểu đồ nội lực.

a) Xác định các phản lực liên kết tác dụng vào dầm hoặc khung (vì phản lực liên kết cùng với tải trọng đều là ngoại lực tác dụng lên hệ đang khảo sát và nội lực chỉ được xác định khi hệ đã cân bằng dưới tác dụng của ngoại lực)

b) Chia đoạn tải trọng và chọn các mặt ứng với từng đoạn tải trọng đó. Viết phương trình nội lực trong từng đoạn đó. Lấy một số giá trị nội lực đặc biệt.

c) Vẽ biểu đồ nội lực (dựa vào các giá trị lực đặc biệt).

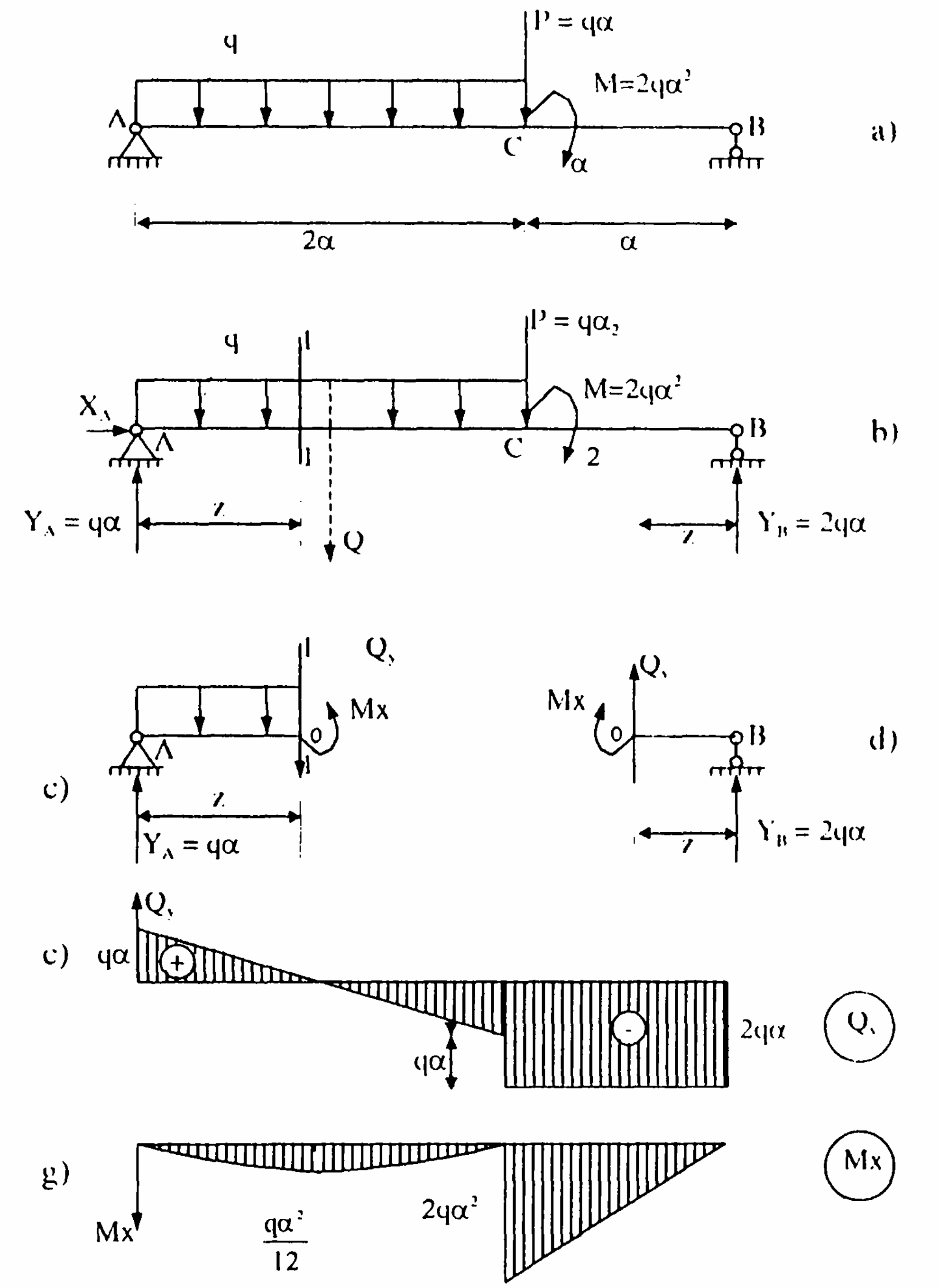
d) Kiểm tra lại dạng biểu đồ nội lực

(Phần này sẽ nói kỹ trong liên hệ vi phân)

3- Các ví dụ:

Để hiểu rõ quá trình vẽ biểu đồ nội lực đối với dầm và khung chịu uốn ta xét một số ví dụ.

Ví dụ 1: vẽ biểu đồ nội lực cho dầm (hình 5-2a).



Hình 5-2

Giải:

a) Xác định phân lực liên kết: theo cơ lý thuyết gối tựa kép A có 2 thành phần phản lực, gối tựa đơn B có 1 thành phần phản lực. Ta giả thiết chiều của các phản lực đã như hình 5-2b.

Cần dùng ba phương trình cân bằng tĩnh để giải ra X_A , Y_A , Y_B

$$\sum X = 0\ ; \quad \text{suy ra:} \quad X_A = 0$$

(Từ nay về sau ta thấy rằng đối với dầm chịu uốn không có thành phần phản lực ngang).

$$\sum mA = 0. \quad \text{Suy ra:} \quad 3\alpha \,.\, Y_B - Q \,.\, q - P \,.\, 2\alpha - M = 0$$

$$\text{hay} \quad 3\alpha \,.\, Y_B - 2\,q\alpha \,.\, \alpha - q\alpha \,.\, 2\alpha - 2\,q\alpha^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y_B = 2q\alpha$$

(Phản lực Y_B tính ra có kết quả dương, chứng tỏ chiều Y_B ta giả thiết ban đầu là đúng. Nếu tính ra có kết quả âm ta cần đổi chiều ngay Y_B để có thể tiếp tục xác định Y_A).

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \quad Y_A + Y_B - 2\,q\alpha - P = 0$$

$$Y_A + 2q\alpha - 2q\alpha - q\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y_A = q\alpha$$

(Phản lực Y_A tính ra có kết quả dương, chứng tỏ chiều Y_A ta giả thiết ban đầu là đúng).

b) Phương trình nội lực:

Trước khi viết phương trình nội lực ta nhắc lại qui ước đầu nội lực:

$Q_y > 0$ nếu nó có khuynh hướng quay phần đang xét theo chiều kim đồng hồ.

$Mx > 0$ nếu nó làm căng thớ dưới của dầm.

- Xét đoạn AC dùng mặt cắt 1-1. Để cho đơn giản ta xét phầh trái (hình 5-2c). Gốc tại A, do dó: o = z ≤ 2a. Giả thiết nội lực có đầu dương.

$$\sum Y = 0 \text{ hay;} \quad Q_Y - q\,.\,z - Y_A = 0$$

$$\text{hay} \quad Q_Y = Y_A - q.z = q\alpha - qz$$

$$Q_Y = q\,(\alpha - z) \qquad \text{(a)}$$

Ở phương trình (a) Q_y biến thiên theo luật bậc nhất đối với z nên ta lấy hai giá trị:

Với $z = 0$ (tại A): $Q_y = q\alpha$

Với $z = 2\alpha$ (tại C): $Q_y = -\,q\alpha$

Lấy mômen đối với điểm 0 (trọng tâm mặt cắt 1-1).

$$\sum m_o = 0 \text{ hay:} \quad Mx + (q.z)\,.\,\frac{z}{2} - Y_A\,.\,z = 0$$

$$\text{hay: } Mx = Y_A\,.\,z - \frac{qz^2}{2} \quad ; \quad Mx = q\alpha.z - \frac{qz^2}{2} \qquad \text{(b)}$$

Ở phương trình (b) Mx biến thiên theo luật bậc hai đối với z. Do đó ít nhất ta cũng phải lấy 3 giá trị:

$$\text{Với } z = 0 \text{ (tại A): } \quad Mx = 0$$

$$\text{Với } z = \alpha \qquad Mx = \frac{q.a^2}{2}$$

$$\text{Với } z = 2\alpha \text{ (tại C): } Mx = 0$$

- Xét đoạn BC:

Dùng mặt cắt 2-2. Để đơn giản ta xét phần phải (hình 5-2d). Gốc tại B, do đó 0 ≤ z ≤ a. Gỉa thiết nooi lực có dấu dương.

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_y = - Y_B = - 2\, q\alpha = const \text{ (hằng số)}$$

$$\sum m_o = 0 \quad \Rightarrow \quad Mx = Y_B.z = \ 2\, q\alpha.z \text{ (bậc 1)}$$

$$z = 0 \text{ (tại B): } Mx = 0$$

$$z = \alpha \text{ (tại C: } \ Mx = 2\, q\alpha^2$$

c) Vẽ biểu đồ nội lực: Q_y và Mx.

Trước khi vẽ hai biểu đồ nội lực ta quy ước:

- Biểu đồ Q_y : $Q_y > 0$; vẽ lên trên đường chuẩn nằm ngang và ngược lại.

- Biểu đồ Mx: Mx > 0 vẽ ở dưới đường chuẩn nằm ngang và ngược lại.

Với các trị số nội lực đã tính ở bước trên, với qui ước vẽ biểu đồ Q_y , Mx đã nói ta vẽ được biểu đồ lực cắt (hình 5-2c) và biểu đồ mômen uốn nội lực (hình 5-2g).

* Chú ý: Sau khi vẽ biểu đồ Mx ta có một nhận xét: biểu đồ Mx luôn nằm ở thớ bị căng (bị dãn) của dầm, thớ nào của dầm bị căng (bị dãn) thì biểu đồ Mx nằm ở thớ đó. Ở hình 5-2g thớ dưới của dầm bị dãn vì Mx nằm ở thớ đó.

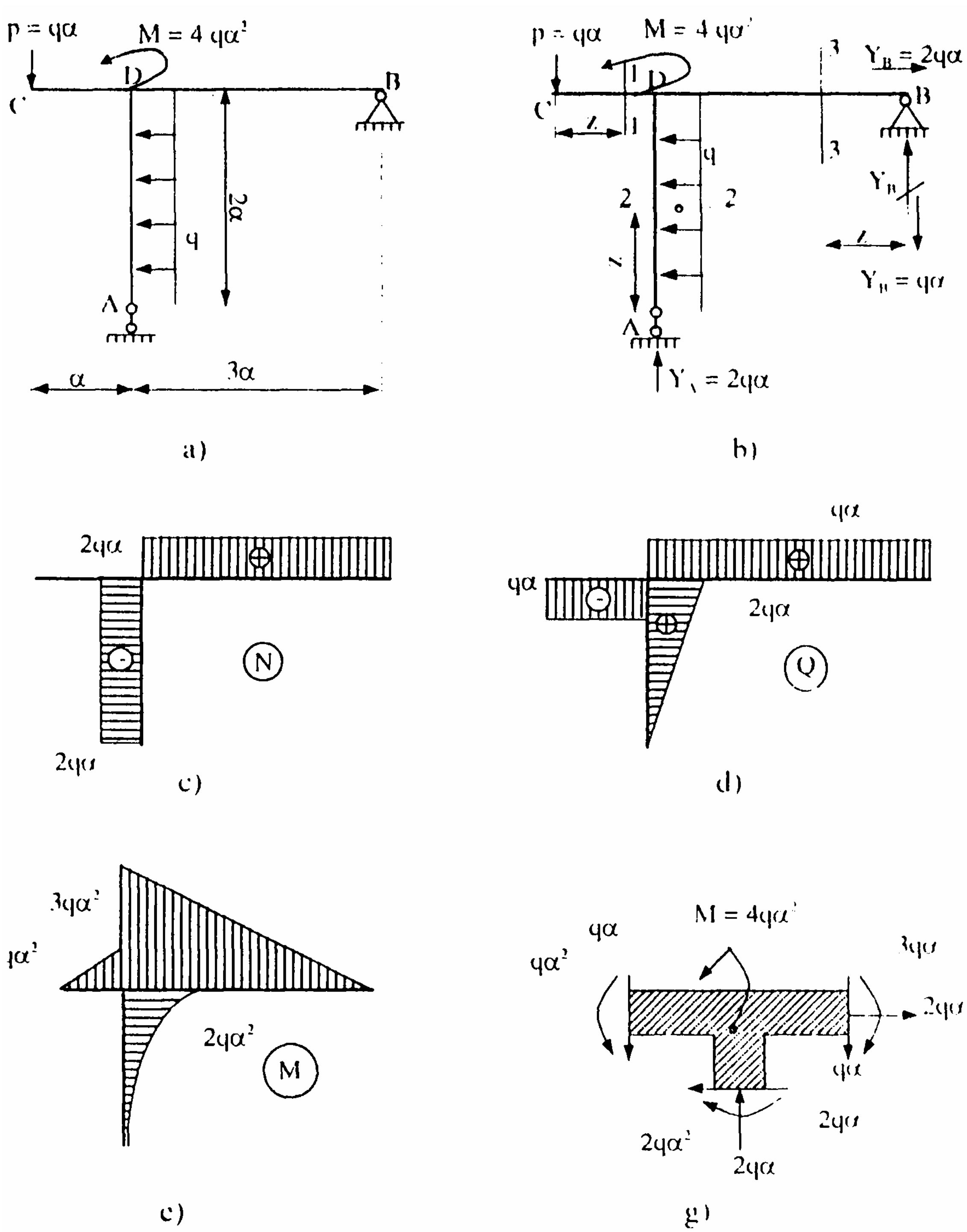
Ví dụ 2: Vẽ biểu đồ nội lực cho khung chịu uốn (hình 5-3a).

Giải:

a) Xác định phản lực liên kết

Giả thiết trước chiều các phản lực liên kết tại A và B (hình 5-3b).

$$\sum m_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\alpha\ .\ Y_A + 2q\alpha.\ \alpha - P.\ 4\alpha - M = 0$$



Hình 5-3

Hay: $3\alpha. + 2q\alpha \,.\, \alpha - q\alpha \,.\, 4\alpha - 4q\alpha^2 = 0$

Giải ra: $Y_A = 2\,q\alpha$

(Kết quả Y_A giải ra dương chứng tỏ chiều Y_A giả thiết đúng).

$$\sum X = 0 \Rightarrow \quad X_B = 2q\alpha$$

Hay: $X_B = 2q\alpha$

(kết quả X_B giải ra dương chứng tỏ chiều X_A giả thiết đúng).

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \quad Y_A + Y_B - P = 0$$

hay $\quad 2q\alpha + Y_B - q\alpha = 0$

$$\Rightarrow \quad Y_B = -q\alpha$$

(Kết quả Y_B giải ra âm chứng tỏ chiều Y_B giả thiết sai).

Ta đổi ngay chiều Y_B (đi xuống).

b) Phương trình nội lực:

Trước khi viết phương trình nội lực cho khung ta qui ước dấu nội lực (lực dọc, lực cắt, mômen uốn):

$N_z > 0$ nếu nó gây kéo phần đang xét (đi ra khỏi mặt cắt) và ngược lại.

$Q_y > 0$ qui ước như dầm.

M_x có thể qui ước tuỳ ý.

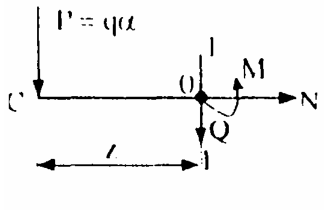
- Xét đoạn CD (hình 5-3b): dùng mặt cắt 1-1.

Để đơn giản xét phần trái mặt cắt 1-1 (gốc tại C).

Do đó: $0 \le z \le a$

Giả thiết nội lực có chiều dương (hình 5-4).

(M > 0 nếu căng thớ dưới đoạn CD).



Hình 5-4

Viết ba phương trình ($\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum m_o = 0$).

Ta có: $\begin{cases} N = 0 \\ Q = -P = -q\alpha = \text{const.} \end{cases}$

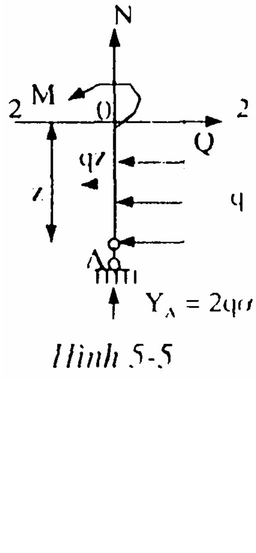
$$\begin{cases} M = -P \cdot z = -q\alpha.z \text{ (bậc 1, căng thớ trên).} \\ z = 0 \text{ (tại C): } M = 0 \\ z = \alpha \text{ (tại D): } M = -q\alpha^2 \end{cases}$$

Xét đoạn AD (hình 5-3b). Dùng mặt cắt 2-2.

Để đơn giản ta xét phần dưới mặt cắt 2-2 (gốc A).

Do đó $0 \le z \le 2\alpha$

Giả thiết nội lực có chiều dương (hình 5-5) (M > 0 nếu nó làm căng thớ bên phải đoạn AD).



Hình 5-5

$$(\sum Y = 0 \; ; \; \sum X = 0 \; ; \; \sum m_o = 0).$$

Ta có: $N = - Y_A = - 2\,q\alpha$ (gây nén)

$Q = q \, . \, z$ (bậc 1):

$z = 0$ (tại A): $Q = 0$

$z = 2\alpha$ (tại D): $Q = 2q\alpha$

$$M = \frac{qz^2}{2}$$ (bậc 2, căng thớ bên phải đoạn AD).

$z = 0$ (tại A): $M = 0$

$$\begin{cases} z = a\,; & M = \dfrac{qz^2}{2} \\ z = 2a \text{ (tại D)}: & M = 2\,q\alpha^2 \end{cases}$$

- Xét đoạn BD (hình 5-3b). Dùng mặt cắt 3-3.

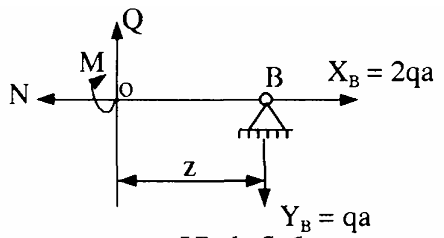
Để đơn giản ta xét phần phải mặt cắt 3-3 (gốc tại B).

Do đó: $0 \le z \le 3$

Giả thiết nội lực có chiều dương (hình 5-6).

(M > 0 nếu căng thớ dưới đoạn BD).

Viết 3 phương trình:



Hình 5-6

$\sum X = 0, \sum Y = 0, \; \sum m_o = 0).$

Ta có: $N = X_B = 2qa$ (gây kéo)

$$\begin{cases} Q = Y_B = qa = \text{const} \\ M = - Y_B \, . \, z = - qa.z \text{ (làm căng thớ trên đoạn BD)} \\ \quad z = 0 \text{ (tại B)}: \quad M = 0 \end{cases}$$

$z = 3\alpha$ (tại D): $M = - 3qa$

c) <u>Vẽ biểu đồ nội lực</u>:

Trước khi vẽ của biểu đồ N, Q, M cho khung ta chú ý qui ước:

Biểu đồ lực dọc N_Z vẽ thớ nào cũng được miễn là đề đúng dấu vào biểu đồ. Tương tự đối với biểu đồ lực cắt Q.

Biểu đồ mômen uốn M vẽ theo thớ thực sự bị căng của khung.

Với qui ước trên và các trị số nội lực tính ở bước b ta vẽ được ba biểu đồ N, Q, M (hình 5-3c, d, e).

* <u>Chú ý</u>: Đối với khung ta còn phải kiểm tra lại trị số nội lực tại nút của khung

bằng cách xét sự cân bằng của nút.

Ở đây ta xét sự cân bằng của nút C. Tưởng tượng dùng ba mặt cắt rất sát nút C. Do đó trị số nội lực trên ba mặt cắt đó chính là trị số nội lực tại nút C.

Tưởng tượng phóng đại nút C cho dễ nhìn. Ta đặt các nội lực N, Q, M vào nút C. Chú ý rằng nếu tại nút có ngoại lực thì cũng đặt cả vào nút để xét sự cân bằng. Toàn bộ các lực tác dụng vào nút C chỉ trên hình 5-3g. Ta thấy ba phương trình cân bằng ($\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum m_o = 0$) được thoả mãn. Vậy nút C cân bằng.

4- Nhận xét chung:

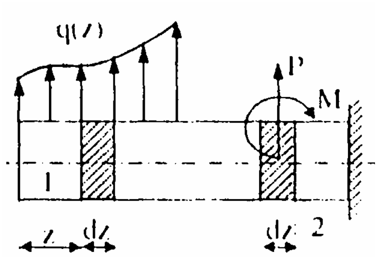
Qua hai ví dụ trên ta thấy giữa tải trọng và nội lực có liên hệ với nhau (ví dụ đoạn có tải trọng phân tố hằng số thì Q bậc 1, M bậc 2,...) đồng thời, giữa nội lực cũng có liên hệ với nhau (ví dụ đoạn Q bằng hằng số thì M bậc 1, Q bậc 1 thì M bậc 2....*)*.

Ngoài ra còn nhiều liên hệ khác.

Sau đây ta xét về bản chất các mối liên hệ đó.

§3- LIÊN HỆ VI PHÂN GIỮA NGOẠI LỰC VÀ NỘI LỰC

xét 1 dầm có đủ ba loại ngoại lực: tải trọng phân bố bất kỳ, lực tập trung P, mômen tập trung M (hình 5-7).



Hình 5-7

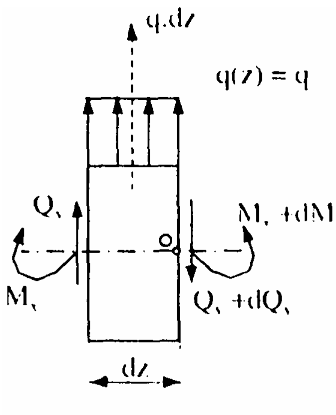
Quy ước dấu của ngoại lực:

P.q > 0 nếu hướng lên và ngược lại.

M > 0 nếu quay thuận chiều kim đồng hồ và ngược lại.

1- Liên hệ tải trọng phân bố và lực cắt.

Tại hoành độ z lực phân bố là q (z). Tại đó ta tách ra một phân tố chiều dài vô cùng bé dz (hình 5-8).



Hình 5-8

Vì chiều dài phân tố là vô cùng bé nên có thể coi lực phân bố q(z) là phân bố đều.

$$q(z) = q = const$$

Hợp lực của lực phân bố đó bằng q.dz. Giả thiết nội lực ở mặt cắt trái là Q_y , Mx ở mặt cắt phải là:

$Q_y + dQ_y .M_x + dM_x$ và dấu của chúng đều dương. Phương trình hình chiếu của các lực lên phương y:

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_y - (Q_y + dQ_y) + q.dz = 0$$

Do đó:
$$\boxed{\frac{dQ_y}{dz} = q} \qquad (5\text{-}1)$$

Vậy: Đạo hàm bậc nhất của lực cắt Q_y theo biến số z tại một điểm bằng cường độ lực phân bố chiều dài tại điểm đó.

2- Liên hệ lực cắt và mômen uốn nội lực.

Lấy mômen của các lực đối với điểm 0 là trọng tâm mặt cắt phải (hình 5-8).

$$\sum m_0 = 0$$

hay:
$$M_x - (M_x + dM_x) + Q_y \,.\, dz - \frac{q.dz^2}{2} = 0$$

bỏ qua vô cùng bé bậc 2 về mômen $\frac{q.dz^2}{2}$, ta có:

Do đó:
$$\boxed{\frac{dM_x}{dz} = Q_y} \qquad (5\text{-}2)$$

Vậy: Đạo hàm bậc nhất của mômen uốn nội lực theo biên số z tại 1 mặt cắt bằng trị số lực cắt tại mặt cắt đó.

3- Liên hệ mômen uốn nội lực với tải trọng phân bố.

Từ (5- 1) và (5-2) ta cố thể suy ra liên hệ:

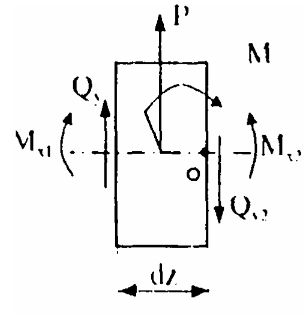
Do đó:
$$\boxed{\frac{d^2M_x}{dz^2} = q} \qquad (5\text{-}3)$$

Vậy: Đạo hàm bậc hai của mômen uốn nội lực tại 1 mặt cắt số z bằng cường độ lực phân bố chiều dài ℓ ại đó.

4- Liên hệ lực tập trung, mômen tập trung với nội lực.

Để xét những liên hệ này ta tách ra một phân tố có chiều dài vô cùng bé dz tại điểm đặt lực tập trung P và mômen tập trung M (hình 5-7).

Nội lực ở mặt cắt trái của phân tố là Q_{y1}, M_{xl} , ở mặt cắt phải là Q_{y2} , M_{x2} (hình 5-9).



Hình 5-9

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{y1} - Q_{y2} + P = 0$$

$$Q_{y2} - Q_{y1} = P$$

Hay: $\Delta Q_y = P$ (5-4)

Vậy tại chỗ có lực tập trung lực cắt có số gia bằng chính lực tập trung đó.

$$\sum m_o = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{x1} - M_{x2} + Q_{y1} \cdot dz + \frac{P.dz}{2} + M = 0$$

Bỏ qua các vô cùng bé về mômen: $Q_{y1}^{o}.dz$ và $\frac{P.dz}{2}$ z

Ta có: $M_{x2} - M_{x1} = M$

Hay: $\Delta M_x = M$ (5-5)

Vậy tại chỗ có mômen ngoại lực tập trung, mômen uốn nội lực có số ra bằng trị số momen ngoại lực đó.

5- Nhận xét chung.

Từ 5 liên hệ vi phân trên ta có một số nhận xét để vẽ nhanh và kiểm tra biểu đồ nội lực.

a) Về dạng biểu đồ Q_y , M_x:

- Từ (5- 1) ta thấy:

+ Đoạn không có tải trọng phân bổ (q = 0) hay $\frac{dQ_y}{dz} = 0$ tức Q_y = const(hằng số).

+ Đoạn q = const ($\frac{dQ_y}{dz}$ = const): Q_y có dạng bậc 1.

- Từ (5-2) ta thấy:

+ Đoạn Q_y = const ($\frac{dM_x}{dz}$ = const): M_x có dạng bậc 1.

+ Đoạn Q_y bậc 1: M_x có dạng bậc 2.

b) Về chiều biến thiên của biểu đồ Q_y , M_x:

- Từ (5- 1) ta thấy:

+ Nếu q > 0 (hướnglên) thì $\frac{dQ_y}{dz} > 0$ tức hàm Q_y đồng biến (hình 5-l0a).

+ Nếu q < 0 (hướng xuống): hàm Q_y nghịch biến (hình 5-l0b).

Hình 5-10

Từ (5-2) ta thấy:

+ Nếu $Q_y > 0$ (tức $\frac{dM_x}{dz} > 0$): hàm M đồng biến (hình 5- 11a)

+ Nếu $Q_y < 0$: hàm M nghịch biến (hình 5- 11b).

Hình 5-11

c) Về cực trị của biểu đồ Mx:

Từ (5-2) ta thấy: tại chỗ $Q_y = 0$ (tức $\frac{dM_x}{dz} = 0$) biểu đồ Mx có cực trị (tiếp tuyến ngang).

d) Về bước nhảy của biểu đồ Q_y, Mx.

- Từ (5-4) ta thấy: tại chỗ có lực tập trung (tải trọng hoặc phân lực liên kết), biểu đồ lực cắt Q_y có bước nhẩy; trị số bước nhẩy bằng trị số lực tập trung; chiều bước nhẩy theo chiều lực tập trung.

- Từ (5-5) ta thấy: tại chỗ có mômen ngoại lực tập trung (tải trọng hoặc phân lực liên kết), biểu đồ mômen uốn nội lực Mx có bước nhảy; trị số bước nhảy bằng giá trị của mômen ngoại lực tập trung.

e) Về bề lõm của biểu đồ Mx:

Từ (5-3) ta thấy:

- Nếu q > 0 (hướng lên): $\frac{d^2Mx}{dz^2} > 0$; đường cong Mx lõm theo chiều dương của trục Mx (hình 5- 12a).

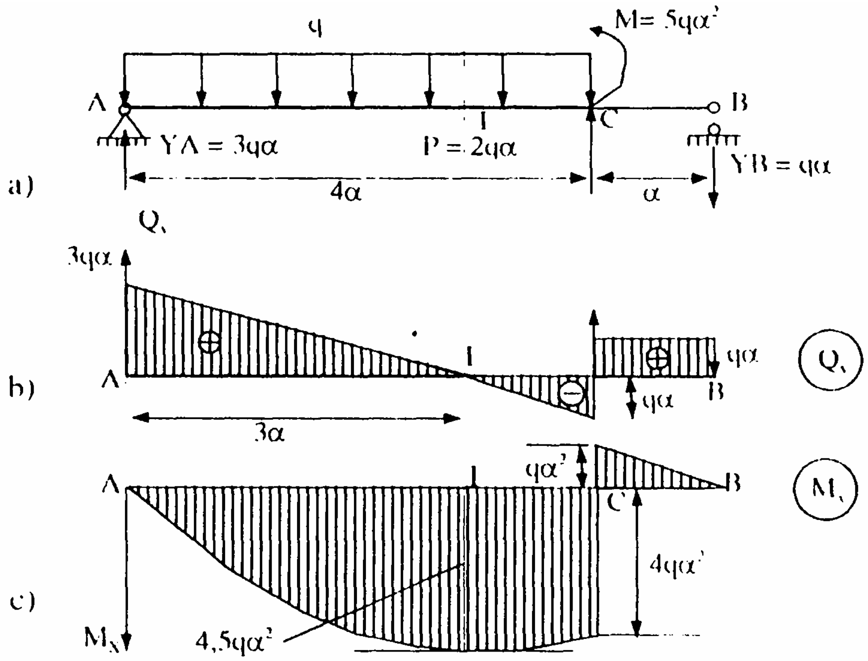
- Nếu q < 0 (hướng xuống): $\frac{d^2Mx}{dz^2} < 0$; đường cong Mx lồi theo chiều dương của trục Mx (hình 5- l2b).

Qua hình 5-12 một cách trực giác, ta luôn thấy: đường cong Mx luốn có khuynh hướng hứng lấy tại trọng phân bố.

a) *Hình 5-12* b)

Nếu nắm vững các nhận xét trên chúng ta có thể vẽ nhanh chóng các biểu đồ nội lực và kiểm tra chúng mà không cần phải qua đầy đủ các bước như đã nêu ra ở hai ví dụ trên.

<u>*Ví dụ:*</u> Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm (hình 5- 13a).



Hình 5-13a

<u>Giải:</u>

<u>*a) Xác định phân lực liên kết:*</u>

Giả thiết chiều YA, YB như hình 5-13a.

$$\sum mA = 0 \Rightarrow$$

$$M + P \cdot 4\alpha - 4q\alpha \cdot 2\alpha - YB = 0$$

$\Rightarrow$ YB = qα (chiều đúng)

$$\sum Y = 0 \quad \text{hay} \quad YA - YB - 4q\alpha + P = 0$$

$\Rightarrow$ YA = 3 qα (chiều đúng)

<u>*b) Vẽ biểu đồ Q_y*</u> (hình 5- 13b).

- Trước tiên vẽ cho đoạn đơn giản BC: Xét 1 mặt cắt bất kỳ trong đoạn BC ta thấy $Q_y = + q\alpha = const$.

Để đảm bảo tại C biểu đồ Q_y có bước nhảy bằng $P = 2q\alpha$ tạt C ta phải lấy xuống dưới đường chuẩn 1 giá trị $Q_y = - q\alpha$ (có lấy như vậy chiều bước nhảy mới theo chiều lực P)

- Đoạn AC: Tại A; biểu đồ Q_y phải có bước nhảy bằng $YA = 3q\alpha$, chiều bước nhảy theo chiều YA. Sau đó Q_y nghịch biến theo qui luật bậc 1 (vì đoạn này q = const và có dấu âm do hướng xuống).

- Cả biểu đồ Q_y có ba bước nhảy lại A, C, B như hình 5- 13b. Biểu đồ Q_y được vẽ xong.

c) Vẽ biểu đồ Mx (hình 5-13c)

- Đoạn BC: tại B không có mômen tập trung nên tại đó $M_x = 0$. δ' đoạn này Q_y = const nên M_x bậc.

1- Vì $Q_y > 0$ nên M_x đồng biến:

Nội lực tại C: $M_x = Y_B.\alpha = q\alpha^2$.

Biểu đồ M_x đoạn BC được vẽ xong.

- Đoạn AC: biểu đồ M_x phải có khuynh hướng hứng lấy tải trọngphân bổ q.

Tại điểm 1, lực cắt $Q_y = 0$, nên tại đó M_x phải có cực trị. Điểm cực trị này chia đường cong M_x trong đoạn AC ra làm hai phần.

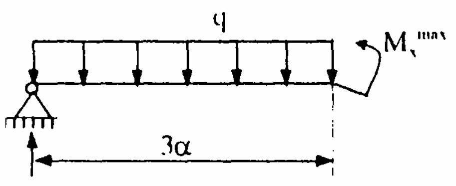
+ Đoạn AI: $Q_y > 0$; M_x đồng biến.

+ Đoạn IC: $Q_y < 0$; M_x nghịch biến.

Tại A không có mômen ngoại lực tập trung nên tại đó $M_x = 0$

Tại C có mômen ngoại lực $M = 5\ q\alpha^2$. Để đảm bảo biểu đồ M_x ở tại C có bước nhảy bằng $5q\alpha_2$, ta phải lấy xuống phía dưới 1 giá trị bằng $4\ q\alpha^2$.

Bằng tính toán đồng dạng ta có đoạn Al = 3α (hình 5-13b). Ở đây ta có thể khảo sát phương trình dạng $Q_y = 0$. Cuối cùng để tìm $M^{max}{}_x$ tại I ta dùng một mặt cắt qua I để tính ngay nội lực tại đó. Xét phần trái (hình 5- 14) ta có:



Hình 5-14

$$M^{max}{}_x = Y_A . 3\alpha - 3q\alpha . 1{,}5\alpha$$
$$= 3q\alpha . 3\alpha - 4{,}5q\alpha^2 = 4{,}5\ q\alpha^2$$

Biểu đồ M_x đoạn AC được vẽ cong.

Cần chú ý rằng: quá trình phân tích thì dài dòng nhưng thực tế chỉ cần hiểu để vẽ nhanh và đúng biểu đồ nội lực thì cách làm này rất ngắn gọn.

PHẦN II
TÍNH TOÁN ĐỘ BỀN DẦM CHỊU UỐN PHẲNG

Ta xét hai trường hợp:

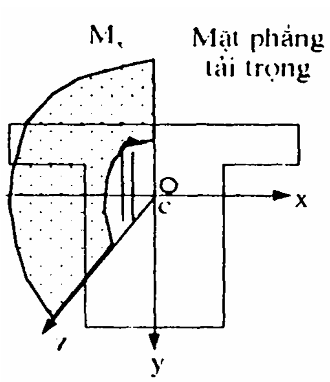
- Dầm chịu uốn thuần tuý phẳng (gọi tắt là uốn thuần tuý).

- Dầm chịu uốn ngang phẳng.

§1- UỐN THUẦN TUÝ.

1- Định nghĩa:

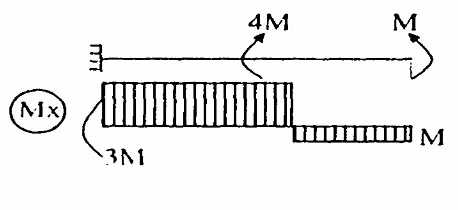
Một dầm (đoạn dầm) gọi là chịu uốn thuần tuý nếu mọi tiết diện của nó chỉ có một thành phần mômen uốn nội lực M_x nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm (hình 5-l5).



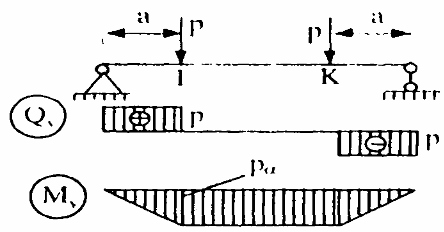
Hình 5-15

Mặt phẳng quán tính chính trung tâm là mặt phẳng tạo bởi một trục quán tính chính trung tâm và trục thanh (trục z). Ở hình 5- l5 mặt phẳng yOz là mặt phẳng quán tính chính trung tâm. Đó cũng là mặt phẳng tải trọng (mặt phẳng đối xứmg).

Ví dụ: Dầm AB chịu uốn thuần tuý vì mọi mặt cắt chỉ có Mx còn lực cắt Q_y = 0 (hình 5- 16) Đoạn I_K của dầm (hình 5-17) chịu uốn thuần tuý vì trong đó chỉ có Mx, còn lực cắt Q_y =0

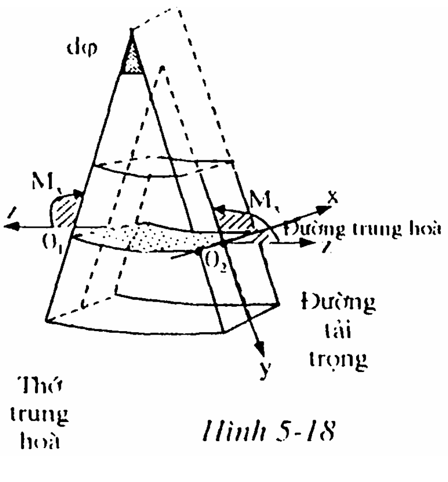


Hình 5-16



Hình 5-17

2- Đường trung hoà:



Hình 5-18

Xét một đoạn thanh chịu uốn thuần tuý. Khi bị uốn các thớ trên bị co lại, cái thớ dưới dãn ra (hình 5-18). Trong các thớ đó có thớ $0_1 0_2$ chỉ bị uốn từ đường thẳng sang cong, còn chiều dài của thớ đó so với lúc chưa bị biến dạng vẫn không đổi. Thớ đó gọi là thớ trung hoà. Các thớ trung hoà có thể tưởng tượng được xếp trên một mặt cong phẳng gọi là mặt trung hoà. Giao tuyến của một trung hoà với mặt phẳng tiết diện gọi là đường trung hoà (trục x).

Trục y là giao tuyến của mặt phẳng tải trọng với mặt phẳng tiết diện nên gọi là đường tải trọng. Ở đây đường trung hoà x luôn vuông góc với đường tải trọng y.

3- Thành lập công thức ứng suất trên mặt cắt ngang:

a) Các giả thuyết:

Để làm cơ sở cho việc thành lập công thức ứng suất trên mặt cắt ngang, người ta đưa ra các giả thuyết sau:

1) Giả thuyết Bécnuli:

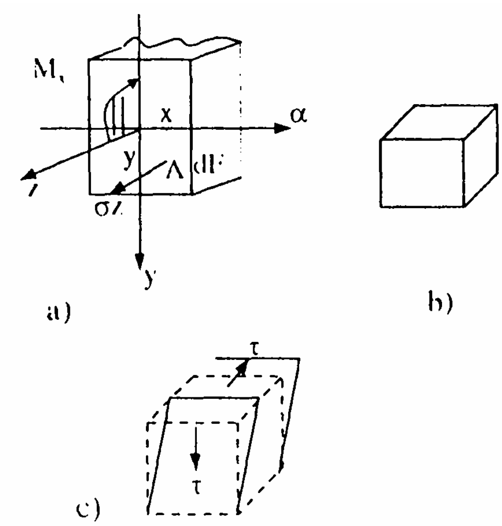
Các mặt cắt ngang của dầm trước và sau biến dạng luôn phẳng và vuông góc với trục thanh.

2) Các thớ dọc của dầm không tác dụng 1ẫn nhau trong khi biến dạng:

3) Vật liệu 1àm việc trong giới hạn của định 1uật Húc.

Các giả thuyết trên đã được kiểm nghiệm là đúng đắn trong hàng loạt thí nghiệm.

b) <u>Ứng suất trên mặt cắt ngang.</u>



Tìm ứng suất tại điểm A (x, y) bất kỳ trên mặt cắt ngang? (hình 5- 19a).

- Trước tiên ta hãy xét xem tại A có thành phần ứng suất gì?

Để khảo sát ta tách ra một phân tố hình hộp vô cùng bé xung quanh điểm A (hình 5- 19b).

+ Dựa vào giả thuyết I ta thấy: Phân tố tại A không thể có ứng suất tiếp τ được. Thực vậy nếu trên mặt song song với mặt cắt ngang có τ thì trên mặt vuông góc với nó cũng có ứng suất tiếp, các góc vuông của phân tố bị xô lệch. Nếu xét nhiều phân tố sát nhau thì điều này làm cho mặt cắt ngang không phẳng và vuông góc với trục thanh. Vậy trên phân bố tại A không thể có τ.

+ Dựa vào giả thuyết 2 ta thấy: theo phương x, y không có ứng suất pháp ($\sigma_x = \sigma_y = 0$).

Vậy phân tố tách ra từ điểm A chỉ có ứng suất pháp duy nhất theo phương z (σ_z).

- Vấn đề thứ hai là: xác định chiều của σ_z?

Trên hình 5- 19a, xung quanh điểm A ta xét một phân tố diện tích vô cùng bé dF. Giả thiết chiều σ_z tại A như hình vẽ. Ta thấy các vi phân nội lực σ_z dF phải gây ra các vi phân mômen $y.\sigma_z .dF$ cùng chiều với M_x (là mômen tổng hợp của các vi phân mômen đó).

Tức là: $$\int_F y \cdot \sigma_z \cdot dF = M_x \qquad (5\text{-}6)$$

Như vậy: chiều của σ_z được xác định.

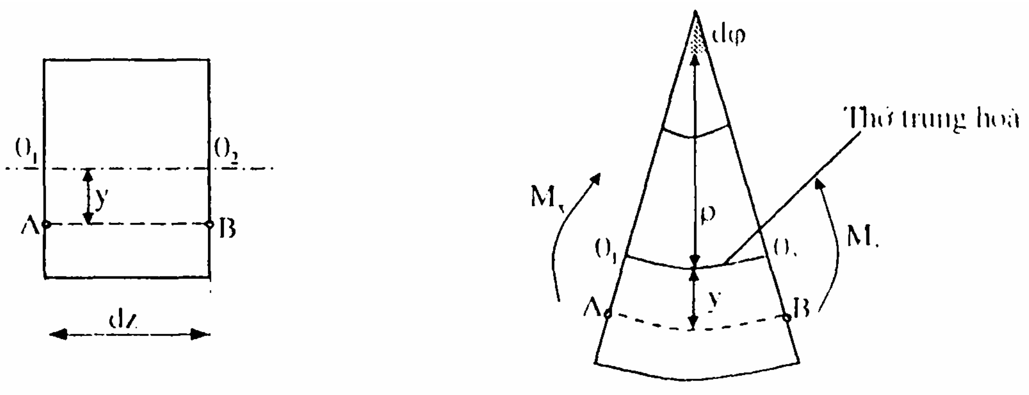
- Vấn đề thứ ba là: tìm trị số của σ_z?

Dựa vào giả thuyết 3 ta có:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z \qquad (5\text{-}7)$$

E 1là mô đuyn đàn hồi của vật liệu (xem chương kéo nén đúng tâm).

Để tìm biến dạng tỷ đối σ_z trong (5-7). Ta xét một đoạn dầm có chiều dài vô cùng bé dz. (hình 5-20a).



Hình 5-20

Trên hình 5-20a ta xét thớ AB cách thớ trung $0_1 0_2$ một đoạn y. Trước biến dạng mọi thớ đều có chiều dài bằng dz.

$$\overline{AB} = dz$$

Sau biến dạng thớ trục bị cong đi, thành thớ trung hoà, nhưng chiều dài của thớ trung hoà vẫn bằng dz (hình 5-20b).

$$\overset{\frown}{O_1O_2} = dz = \rho \cdot d\varphi$$

p là bán kính cong của thớ trung hoà.

Vậy: $\overline{AB} = dz = \rho\, d\varphi$

Do đó: $$\varepsilon_z = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi}$$

Hay: $$\varepsilon_z = \frac{y}{\rho} \qquad (5\text{-}8)$$

Thay (5-8) vào (5-7), ta đó:

$$\sigma_z = E \, . \, \frac{y}{\rho} \qquad (5\text{-}9)$$

Thay (5-9) vào (5-6), ta đó:

$$\frac{E}{\rho} \int_F y^2 \, dF = M_x$$

hay $$\frac{E}{\rho} \, . \, J_x = M_x$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}} \qquad (5\text{-}10)$$

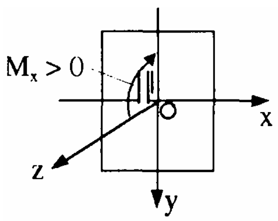
(5-10) là công thức tính độ cong của thớ trung hoà (độ cong của trục dầm).

Thay (5-10) vào (5-9), ta được:

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} \, . \, y} \qquad (5\text{-}11)$$

(5- 11) là công thức tính ứng suất pháp trên mặt cắt ngang tại điểm A(x, y).

M_x là mômen uốn nội lực tại mặt cắt đang xét



Hình 5-21

<u>Quy ước</u>: $M_x > 0$ nếu làm căng thớ nằm về phía chiều dương của trục y (hình 5-21).

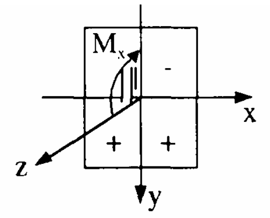
J_x là mômen quán tính của toàn bộ mặt cắt ngang đối với trục trung hoà x.

Trong công thức (5-11) ta phải xét dấu của hai đại lượng: M_x , y.

Để tránh phiền phức trên, người ta đưa ra công thức kỹ thuật:

$$\sigma_z = \pm \frac{|M_x|}{J_x} |y| \qquad (5\text{-}12)$$

Trong công thức (5-12) σ_z lấy dấu + nếu điểm đang tính ứng suất δ’ vùng kéo (dãn), lấy dấu - nếu điểm tính ứng suất δ’ vùng nén (co).



Hình 5-22

Ở hình 5-22 ta thấy: Mọi điểm nằm dưới trục trung hoà x đều ở vùng kéo nên ứng suất lấy dấu (+), mọi điểm nằm trên trục trung hoà x đều δ' vùng nén nên ứng suất lấy dấu (-).

* <u>Nhận xét:</u>

Trong trường hợp uốn thuần tuý: trục trung hoà x chính là trục trung tâm của mặt cắt (hay trục trung hoà x luôn qua trung tâm C của mặt cắt ngang).

Thực vậy nếu gọi σ_z. dF là vi phân nội lực tác dụng lên phân tố diện tích dF. Tổng các vi phân lực đó chính là Nz.

Tức là: $$N_z = \int_F \sigma_z \, . \, dF$$

Vì mặt cắt ngang chỉ có M_x nên $N_z = 0$.

Tức là: $$\int_F \sigma_z \, . \, dF = 0$$

Hay: $$\frac{E}{\rho}\int_F y dF = 0 \text{ hay } \frac{E}{\rho} \, . \, S_x = 0 \quad (a)$$

Tỷ số $\frac{E}{p}$ không thể bằng không, nên để biểu thức (a) thoả mãn thì chỉ còn có khả năng mômen lĩnh $S_x = 0$, tức trục trung hoà x là trục trung tâm.

2- Trong (5- 10) ta thấy: nếu tích số EJ_x càng lớn thì độ cong $\frac{1}{p}$ của dầm càng nhỏ, tức bán kính cong ρ của trục dầm càng lớn. Điều đó có nghĩa: nếu tích EJ_x càng lớn thì trục dầm càng ít bị uốn cong.

Vì lý do đó người ta gọi tích EJ_x là độ cứng khi uốn của dầm.

4- Biểu đồ ứng suất pháp và mặt cắt hợp lý.

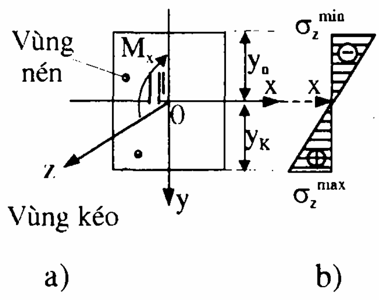
a) Biểu đồ ứng suất pháp:

Xét công thức: $\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} \, . \, y$

Tại 1 mặt cắt M_x, J_x có giá trị xác định không đổi.

Vì vậy trong công thức đó σ_z phụ thuộc bậc nhất đối với tung độ y

Để biểu diễn sự biến thiên của ứng suất, pháp dọc theo chiều cao mặt cắt người ta dùng biểu đồ ứng suất pháp. Vì biểu đồ $\sigma_z = f(y)$ có dạng đường bậc nhất nên chỉ cần xác định hai giá trị.



Hình 5-23

Tại: y = 0 (ứng với các điểm trên trục trung hoà x): $\sigma_z = 0$

Tại: $y = y_k$ (ứng với các điểm ở mép dưới mặt cắt), hình 5-23a).

$$\sigma_z^{max} = + \frac{|M_x|}{J_x} |y_K| \qquad (5\text{-}12)$$

Tại: $y = y_n$ (ứng với các điểm δ' mép trên mặt cắt).

$$\sigma_z^{min} = - \frac{|M_x|}{J_x} |y_n| \qquad (5\text{-}13)$$

Biểu đồ ứng suất pháp được vẽ ở hình 5-23b.

y_k, y_n là tung độ của điểm nguy hiểm về kéo và nén.

b) Mặt cắt hợp lý:

Một mặt cắt của dầm chịu uốn thuần tuý gọi là được thiết kế hợp lý nếu điểm nguy hiểm về kéo (σ_{max}) và điểm nguy hiểm về nén (σ_{min}) bị phá hỏng cùng một lúc.

Nói cách khác, khi σ_{max} đạt từ $[\sigma]_k$ thì cùng lúc đó $|\sigma_{min}|$ cũng đạt tới $[\sigma]_n$.

Tức là:

$$\begin{cases} \sigma_{max} = \dfrac{|M_x|}{J_x} |y_K| = [\sigma]_K & (5\text{-}14) \\ |\sigma_{min}| = \dfrac{|M_x|}{J_x} |y_n| = [\sigma]_n & (5\text{-}15) \end{cases}$$

Suy ra: $$\frac{|y_k|}{|y_n|} = \frac{[\sigma]_K}{[\sigma]_n} \qquad (5\text{-}16)$$

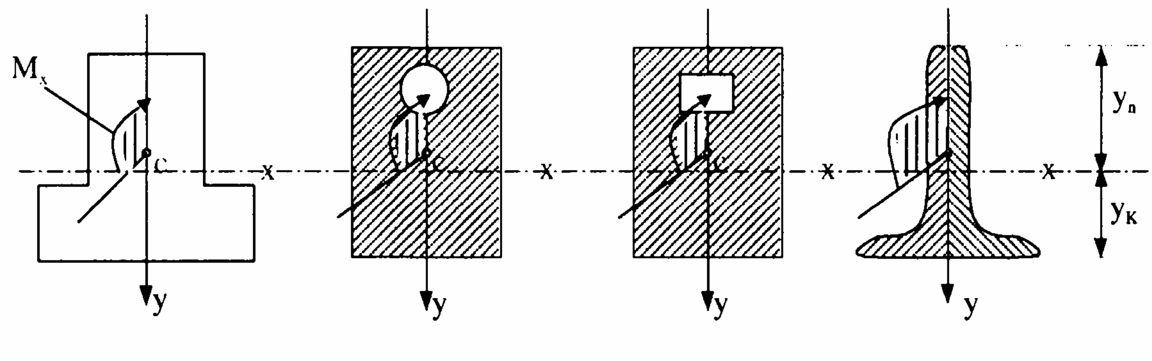
Đặt tỷ số: $$\frac{[\sigma]_K}{[\sigma]_n} = \alpha$$

Từ (5-16) ta có: $$\boxed{|y_K| = \alpha \, |y_n|} \qquad (5\text{-}17)$$

Vậy: Một mặt cắt gọi là hợp lý nếu nó được thiết kế thoả mãn biểu thức (5- 17).

- Với vật liệu dòn: Vì $[\sigma]_k < [\sigma]_n$ nên $\alpha < 1$.

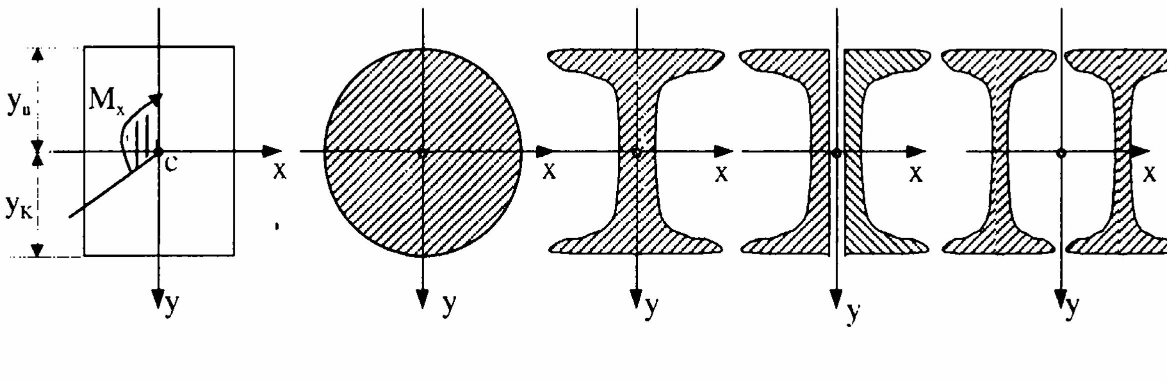
Do đó từ (5-l7) ta thấy: mặt cắt hợp lý của loại vật liệu này là các loại mặt cắt sao cho $|y_k| < |y_n|$. Đó là các dạng mặt cắt chỉ có một trục đối xứng, còn trục trung hoà x không phải là trục đối xứng (hình 5-24).



Hình 5-24

- Với vật liệu dẻo: Vì $[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$ nên $\alpha = 1$.

Do đó, từ (5- 17) ta thấy: mặt cắt hợp lý của loại vật liệu này là các mặt cắt sao cho $|y_k| = |y_n|$. Đó là các mặt cắt có hai trục đối xứng. Trục trung hoà x cũng là một trục đối xứng (hình 5-25).



Hình 5-25

5- Điều kiện bền khi uốn thuần tuý.

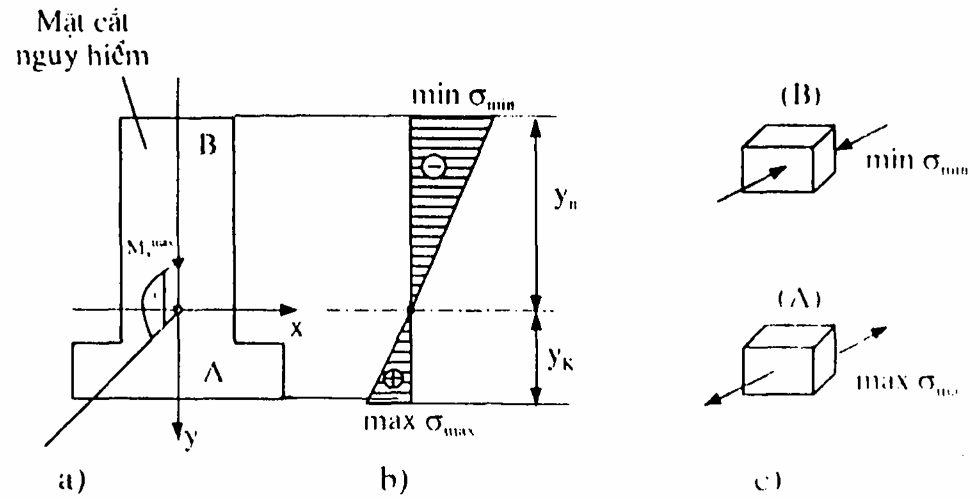
Trên hình 5-23 ta thấy: tại một mặt cắt ngang, với một trị số M_x, xác định ta luôn có hai giá trị ứng suất pháp cực trị (σ_{max}, σ_{min}).

Trên biểu đồ M_x mômen uốn nội 1ực M_x biến thiên theo trục dầm. Tại mặt cắt nguy hiểm (có M_x^{max}) hai giá trị ứng suất tại hai mép ngoài cùng δ' mặt cắt sẽ là max σ_{max} và min σ_{min}

Xét hai trường hợp sau:

a) Trường hợp vật liệu dòn, mặt cắt có một trục đối xứng: (hình 5-26a).

Mặt cắt nguy hiểm:



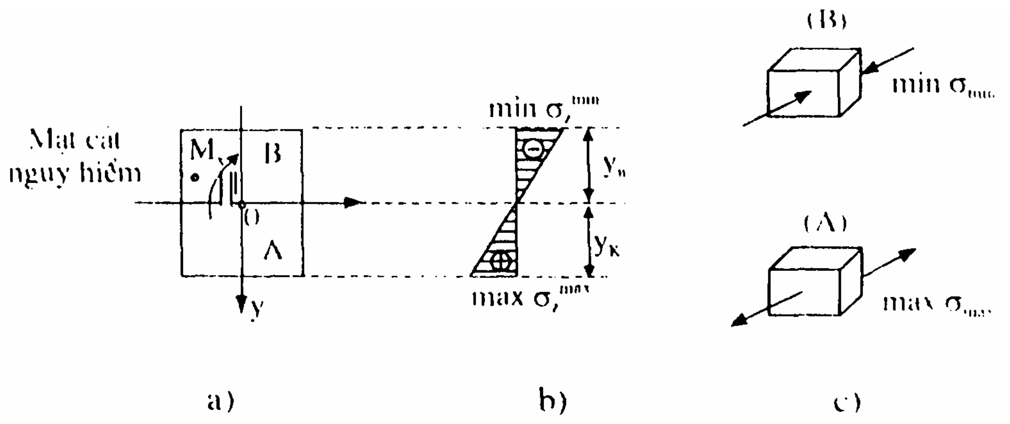
Hình 5-26

Biểu đồ ứng suất pháp (hình 5-26b) cho thấy các điểm nguy hiểm về kéo (max σ_{max}) ở mép dưới mặt cắt (điểm A); các điểm nguy hiểm về nén (min σ_{min}) ở mép trên mặt cắt (điểm B). Tách ra tại A và B các phân tố hình hộp vô cùng bé (hình 5-26c) ta thấy chúng đều ở trạng thái ứng suất đơn.

Vậy điều kiện bền cho điểm nguy hiểm vẽ kéo và nén là:

$$\boxed{\begin{aligned} \max \sigma_{max} &= \frac{\left|M_x^{max}\right|}{J_x}\left|y_K\right| \le [\sigma]_K \\ \min \sigma_{min} &= \frac{\left|M_x^{min}\right|}{J_x}\left|y_n\right| \le [\sigma]_n \end{aligned}} \qquad (5\text{-}18)$$

b) Trường hợp vật liệu dẻo, mặt cắt có hai trục đối xứng (hình 5-27a).



Hình 5-27

Ở hình 5-27b ta thấy: $|y_k| = |y_n| = |y_{max}|$

Do đó trị số $\max \sigma_{max} = |\sigma_{min}| = \frac{|M_x^{max}|}{J_x} |y_{max}|$

hay $$\max \sigma_{max} = \frac{|M_x^{max}|}{\frac{J_x}{|y_{max}|}}$$

Đặt: $$W_x = \frac{J_x}{|y_{max}|} \qquad (5\text{-}19)$$

W_x gọi là môđuyn chống uốn của mặt cắt.

Từ (5-20) ta thấy thứ nguyên của W_x là $|L|^3$.

Đơn vị là: m^3, cm^3, mm^3, ...

Vậy: $$\max\sigma_{max} = \frac{|M_x^{max}|}{W_x}$$

Ta thấy các điểm A và B trên hình 5-27a đều có trị số ứng suất bằng nhau và chúng đều ở trạng thái ứng suất đơn (hình 5-27c). Vật liệu dẻo chịu kéo nén tốt như nhau nên điều kiện bền chỉ là:

$$\boxed{\max\sigma_{max} = \frac{|M_x^{max}|}{W_x} \le |\sigma|} \qquad (5\text{-}20)$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12}\ ; \qquad y_{max} = \frac{h}{2}$$

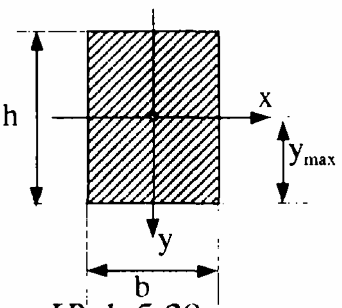
Theo (5-19) ta có: $$W_x = \frac{bh^2}{6}$$

Mặt cắt hình tròn rỗng (hình 5-29)

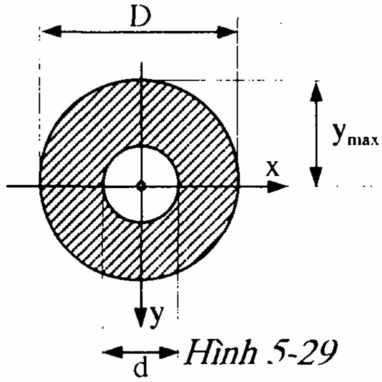
$$J_x = 0{,}05\, D^4\, (1 - \eta^4)$$

$$y_{max} = \frac{D}{2}$$

Vậy: $$W_x = 0{,}1\, D^3\, (1 - \eta^4)$$



Hình 5-28



Hình 5-29

c) Các bài toán tính bền - trình tự tính toán bền đối với dầm chịu uốn thuần tuý.

Từ điều kiện bền (5- 18) hoặc (5-20) ta có dạng bài toán tính toán về bền.

+ Kiểm tra bền: tức là xem các biểu thức (5- 18) hoặc (5-20) có thoả mãn không.

+ Chọn tải trọng cho phép (qua trị số M_x^{max}).

+ Chọn tiết diện (qua W_x)

- Trình tự các bài toán tính bền:

+ Vẽ biểu đồ mômen uốn nội lực M_x.

+ Xác định mặt cắt nguy hiểm (có M_x^{max}).

+ Viết các điều kiện bền (5-18) hoặc (5-20) để kiểm tra bền, chọn tải trọng cho phép hoặc chọn tiết diện.

§2- UỐN NGANG PHẲNG

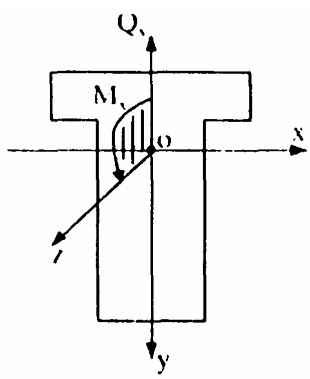
1- Định nghĩa: Một dầm (đoạn dầm) gọi là chịu uốn ngang phẳng nếu mọi mặt cắt ngang của nó xuất hiện một cặp nội lực là lực cắt Q_y và mômen uốn M_x nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm (hình 5-30)

Mômen uốn nội lực M_x sẽ gây ứng suất pháp, còn lực cắt Q_y sẽ gây ứng suất tiếp nên ta sẽ xét hai tại ứng suất đó.

2- Ứng suất pháp.

Bằng hàng loạt thí nghiệm và lý thuyết đàn hồi đã chứng minh: mặt cắt ngang của dầm chịu uốn ngang phẳng không hoàn toàn phẳng và vuông góc và trục thanh như uốn thuần tuý, nhưng sự biến dạng của mặt cắt ngang dù là không đáng kể và có thể bỏ qua.

Vì vậy, người ta vẫn dùng công thức ứng suất pháp của uốn thuần tuý.



Hình 5-30

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} \cdot y} \qquad (5\text{-}21)$$

hoặc $$\boxed{\sigma_z = \pm \frac{|M_x|}{J_x} |y|} \qquad (5\text{-}22)$$

Tất nhiên hai công thức (5-21), (5-22) dùng ở đây chỉ là gần đúng, nhưng đủ đáp ứng yêu cầu kỹ thuật.

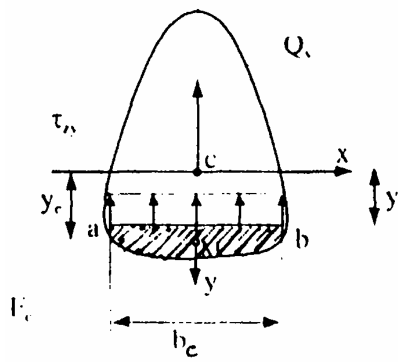
3- Ứng suất tiếp:

a) Công thức Jurapski:

Xét một mặt cắt có riêng lực cắt Q_y tác dụng (hình 5-31).

Tìm ứng suất tại điểm M trên mặt cắt có tung độ y?

Turapsk tiến hành như sau:



Hình 5-22

Kẻ qua M một đoạn ab. Chiều dài ab ứng với điểm M gọi là bề rộng cắt (bc). Phần diện tích nằm dưới đoạn ab gọi là diện tích cắt (F_e). Jurapski đã chứng minh: ứng suất tiếp tại mọi điểm trên đoạn ab có phương song song với trục y (ký hiệu τ_{zy}), có chiều theo chiều của lực cắt Q_y, có trị số đều bằng nhau và bằng:

$$\boxed{\tau_{zy} = \frac{Q_y . S_x^c}{J_x . b_c}} \qquad (5\text{-}23)$$

Trong đó:

Q là lực cắt tại mặt cắt đang xét.

J_x là mômen quán tính của toàn bộ mặt cắt lấy đối với trục trung hoà x.

b_c là bề rộng cắt (biến đổi theo điểm cần tính ứng suất tiếp).

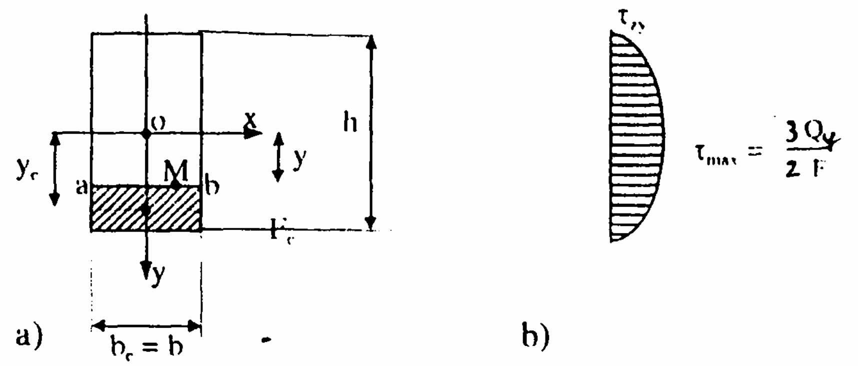
S_x^c là mômen tĩnh của phần diện tích F^c đối với trục x (S_x^c biến đổi theo b_c).

Nếu biết tung độ trọng tâm y_c của F_c (hình 5-31) thì S_x^c có thể tính:

$$S_x^c = y_c . F_c \qquad (5\text{-}24)$$

Ví dụ: Tìm công thức ứng suất tiếp đối với trường hợp mặt cắt chữ nhật (hình 5-32a). Vẽ biểu đồ ứng suất tiếp?

Áp dụng công thức Jurapski (5-23); ta có:



Hình 5-32

$$J_x = \frac{bh^3}{12} \quad ; \quad S_x^c = F_c \cdot y_c$$

$$F_c = b\left(\frac{h}{2} - y\right) \quad ; \quad y_c = y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)$$

Do đó: $S_x^c = \frac{b}{2}\left(\frac{h}{4} - y^2\right)$

thay vào (5-23), ta có:

$$\tau_{zy} = \frac{6Q_y}{bh^2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \qquad (5\text{-}25)$$

Từ (5-25) ta thấy: τ_{zy} biến thiên theo qui luật bậc 2 đối với tung độ y.

Tại mép của mặt cắt ($y = \frac{h}{2}$) : $\tau_{zy} = 0$

Tại trục trung hoà x (y = 0): $\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{bh}$ (5-26)

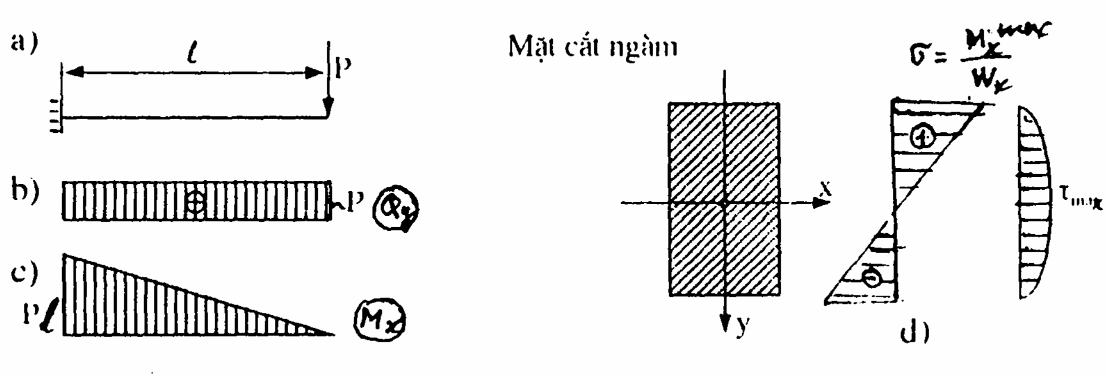
Biểu đồ ứng suất tiếp τ_{zy} được vẽ ở hình (5-32b).

4- Điều kiện bền khi uốn ngang phẳng.

Trong dầm chịu uốn ngang phẳng ngoài ứng suất pháp như uốn thuần tuý còn có ứng suất tiếp.

Trong tính toán bền, người ta thường bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất tiếp mà chỉ quan tâm tới ứng suất pháp vì ảnh hưởng của ứng suất tiếp so với ứng suất pháp là không đáng kể.

Thực vậy, có thể xét một trường hợp đơn giản sau (hình 5-33a).



Hình 5-33

Biểu đồ nội lực như hình 5-33b và c.

Mặt cắt nguy hiểm tại ngàm có $M_x^{max} = Pl$; $Q_y = P$

Ứng suất pháp cực đại:

$$\max \sigma_{max} = \frac{|M_x^{max}|}{W_x} = \frac{6P\ell}{bh^2}$$

Ứng suất tiếp cực đại tính theo (5-26).

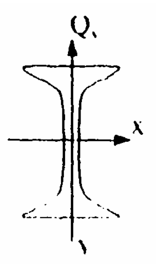
$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{bh} = \frac{3}{2}\frac{P}{bh}$$

Xét tỷ số: $$\frac{\tau_{max}}{\max\sigma_{max}} = \frac{h}{4\ell}$$

Ta thấy: dầm là vật thể thanh, do đó chiều cao h rất nhỏ so với chiều dài ℓ . Vì vậy tỷ số $\frac{h}{4l}$ là rất bé. Điều đó chứng tỏ ứng suất tiếp bé hơn rất nhiều so với ứng suất pháp nên có thể bỏ qua.

Kết luận: Tính toán bền cho uốn ngang phẳng giống uốn thuần tuý (xem mục 5 tiết §1).

**Chú ý:* Nếu gặp những mặt cắt có bề rộng hẹp như ở hình 5-34 thì ứng suất tiếp có trị số khá lớn không thể bỏ qua (trường hợp này cần tham khảo giáo trình của Bộ Đại học và THCN - tập 1 - 1969).



Hình 5-34

Ví dụ:

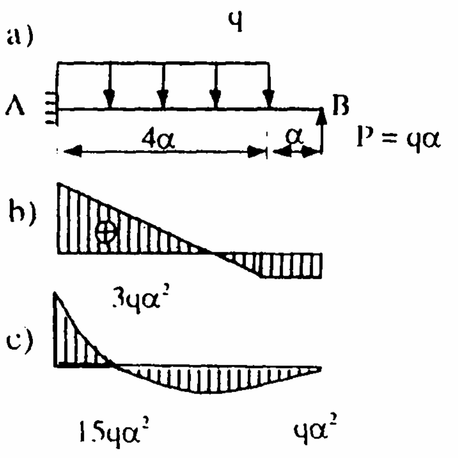
Chọn tải trọng cho phép tác dụng lên dầm AB (hình 5-35a) nếu $|\sigma|$ = l6kN/cm^2; a= 10cm; dầm có mặt cắt chữ nhật h = 2b = 6cm.

Giải:

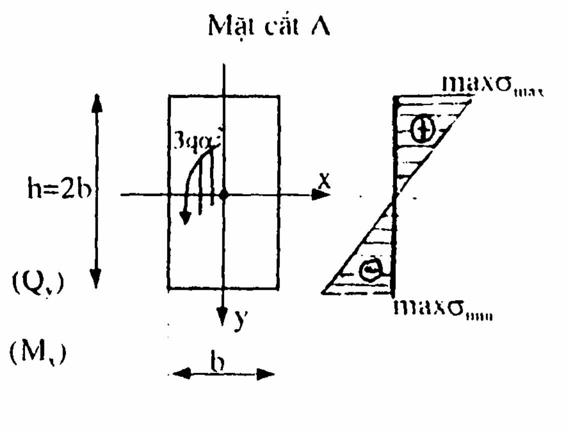
1 - Vẽ biểu đồ nội lực Q_y, M_x (hình 5-35b, c).

(Biểu đồ Q_y để kiểm tra M_x).

2- Chọn mặt cắt nguy hiểm, mặt cắt tại ngàm A. $M_x^{max} = -3q\alpha^2$



Hình 5-35



Hình 5-36

3- Điều kiện bền cho điểm nguy hiểm. Điểm nguy hiểm về kéo và nén tại mặt cắt nguy hiểm chỉ trên hình 5-36.

Điều kiện bền: $\max\sigma_{max} \quad \frac{|M_x^{max}|}{W_x} \le [\sigma]$

hay $\frac{3q\alpha^2}{\frac{bh^2}{6}} \le [\sigma]$

Thay: h = 2b ta có: $\frac{9}{2}\cdot\frac{qa^2}{b^3} \le [\sigma]$

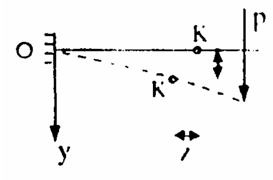
Suy ra: $q \le \frac{2}{9}\cdot\frac{b^3.[\sigma]}{a^2} = \frac{2}{9}\cdot\frac{3^3.16}{10^2} = \frac{96}{10^2} = 0.06$ KN/cm

PHẦN III

TÍNH TOÁN ĐỘ CỨNG DẦM VÀ KHUNG CHỊU UỐN

§1- BIẾN DẠNG VÀ CHUYỂN VỊ - PHƯƠNG PHÁP TÍNH TOÁN ĐỘ CỨNG.

1- Biến dạng và chuyển vị uốn:

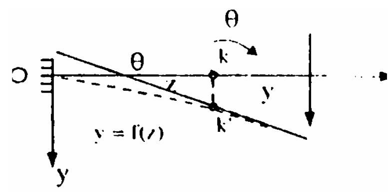


Hình 5-37

Xét 1 dầm chịu uốn (hình 5-37). Đường biên dạng của trục dầm (đường đứt nét) gọi là đường đàn hồi.

Do dầm bị biến dạng, một điểm k bất kỳ trên dầm sẽ chuyển tới vị trí mới k'. kk' gọi là chuyển vị toàn phần của điểm k. Chuyển vị kk' được phân làm hai thành phần: chuyển vị đúng y (thường gọi là độ võng và chuyển vị ngangz).

Trong thực tế, chuyển vị ngang z có giá trị nhỏ hơn rất nhiều so với độ võng y nên có thể bỏ qua.



Hình 5-38

Do đó coi dầm chỉ có độ võng y, sơ đồ biến dạng gần đúng của dầm được chỉ trên hình 5-38

Phương trình y = f(z) gọi là phương trình đường đàn hồi.

Sau biến dạng, mặt cắt ngang tại k bị xoay đi một góc θ (θ gọi là góc xoay của mặt cắt tại k).

Trên hình 5-38 ta thấy θ còn là góc giữa tiếp tuyến của đường cong y = f(z) tại điểm k với phương trục z.

Theo toán học ta có: $y' = tg\theta$

Vì các giá trị độ võng y là rất bé (so với bản thân kích thước dầm) nên gốc θ rất bé. Do đó có thể xem:

$\theta \approx tg\theta = y'$. Đó là liên hệ góc xoay và độ võng.

<u>Kết luận:</u> Khi dầm bị uốn có hai loại chuyển vị:

- Chuyển vị đứng (độ võng) y.

- Góc xoay: $y' = \theta$.

* Quy ước dấu của chuyển vị: Trong hệ toạ độ yoz như hình 5-38.

$y > \theta$ nếu điểm tính độ võng bị võng xuống và ngược lại.

$0 > \theta$ nếu mặt cắt tính góc xoay quay thuận chiều kim đồng hố và ngược lại.

2- Điều kiện cứng và phương pháp tính toán độ cứng.

Các chi tiết máy (kết cấu) ngoài đảm bảo điều kiện bền còn phải đảm bảo cả điều kiện cứng để cho chúng làm việc bình thường (ví dụ trục chính của máy tiện nếu không có độ cứng cần thiết thì đầu trục chính sẽ bị đảo nhiều, ảnh hưởng lớn tới độ chính xác của chi tiết gia công. Trục rôto của động cơ điện nếu không có độ cứng cần thiết thì do có lực quán tính ly tâm tác dụng vào rôto, trục rôto sẽ có biến dạng lớn làm cho rôto bị sát vào stato, do đó động cơ bị phát nóng. Các trục truyền của máy nếu có biến dạng lớn sẽ làm các bánh răng gắn vào nó ăn khớp không tốt, khi máy chạy sẽ phát sinh nhiều tiếng ồn và làm giảm tuổi thọ bánh răng. Ngoài ra, các trục truyền biến dạng lớn sẽ làm cho ổ trượt mòn không đều (nếu vật liệu trục cứng hơn ổ) và trục mòn không đều (nếu vật liệu ổ cứng hơn trục). Đó là hiện tượng bị dơ giữa ổ và trục làm cho máy chạy bị giảm tuổi thọ và phát sinh tiếng ồn lớn.

Các ví dụ trên cho thấy: cần phải khống chế biến dạng (chuyển vị) ở dầm trong một phạm vi cho phép, tức là:

$$\left.\begin{aligned} y_{max} = f &\leq |f| \\ \theta_{max} &\leq |\theta| \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}27)$$

y_{max}, θ_{max} là độ võng và góc xoay cực đại tính toán được ở dầm

$|f|$, $|\theta|$ là độ võng và góc xoay cho phép (được lấy theo qui phạm hay điều kiện làm việc của chi tiết máy).

Ví dụ

- Trục có công dụng chung: $|f| = \left[\frac{3}{10.000} \div \frac{5}{10.000}\right]\ell$:

ℓ là chiều dài trục.

- Trục động cơ điện: $|f| = 0,1\delta$ (δ là khe trở giữa rôto và stato).

- Cho nối bánh xe và trục: $|\theta| = 10^{-3}$ Rad

- Tại ổ trượt: $|\theta| = 10^{-3}$ Rad

Công thức (5-27) là điều kiện cứng đối với dầm chịu uốn.

Từ (5-27) ta cũng có ba bài toán tinh cứng.

+ Kiểm tra độ cứng.

+ Chọn tải trọng cho phép.

+ Chọn tiết diện.

§2- PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CỦA ĐƯỜNG ĐÀN HỒI.

Ở (5-l0) ta đã có công thức tính độ cong của trục dầm sau biến dạng.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \qquad (a)$$

(ρ là bán kính cong của thớ trung hoà hay trục dầm sau biến dạng).

Mặt khác, trục dầm sau biến dạng là một đường cong biểu diễn hàm y = f(z). Theo toán học, độ cong của đường cong biểu diễn hàm y = f(z) là:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \qquad (b)$$

Kết hợp (a) và (b) đã có: $\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \pm \frac{M_x}{EJ_x}$

Vì góc xoay θ = y' là vô cùng bé. y'^2 là vô cùng bé bậc hai nên có thể bỏ qua.

Vậy: $y'' = \pm \frac{M_x}{EJ_x}$ (c)

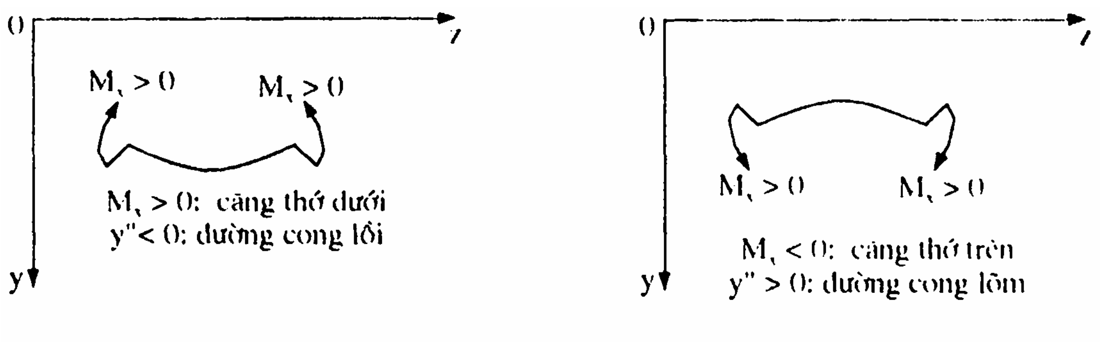
Ta xét dấu biểu thức (c)?

Tính EJ_x luôn dương. Vậy xét dấu biểu thức (c) tức là xét mối quan hệ về dấu của hai đại lượng y" và M_x: Quan hệ đó được chỉ trên hình 5-39.

Từ hình vẽ đó ta thấy: y" luôn ngược dấu với M_x

Vậy: $\boxed{y'' = -\frac{M_x}{EJ_x}}$ (5-28)

(5-28) là phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi.



Hình 5-39

§3- TÍNH CHUYỂN VỊ THEO ĐẠO HÀM RIÊNG CỦA THẾ NĂNG.

1- Định lý Catilianô: "Đạo hàm riêng của thế năng theo một lực Pknào đó bằng chuyển vị theo phương của lực đó".

Tức là: $$\boxed{\Delta k = \frac{\partial U}{\partial P_k}} \qquad (5\text{-}29)$$

Thế năng biến dạng đối với dầm chịu nén được tính theo biểu thức:

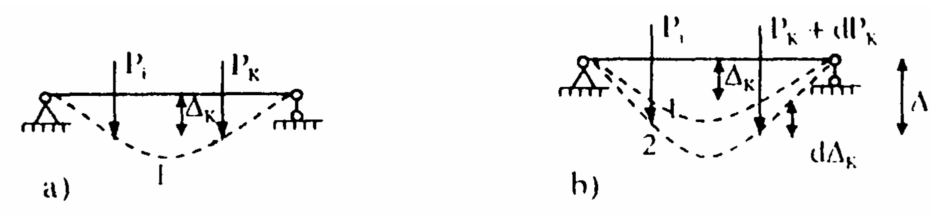
$$\boxed{U = \sum \int_0^l \frac{M_x^2}{2EJ_x}\,dz} \qquad (5\text{-}30)$$

<u>Chứng minh:</u>

Xét một hệ đàn hồi chịu các lực P_i (i = 1, 2,...n) và lực P_k (hình 5-40a). Chuyển vị dưới điểm đặt của lực P_k do chính nó gây ra là Δk.

Lại xét hệ đàn hồi giống như trên chịu lực P_i và một lực (Pk + $d^o{}_n$).

Ta chú ý tới công của vi phân lực dPk trên đoạn chuyển vị Δ (hình 5-40b).



Hình 5-40

Lực dPk di chuyển trên hai đoạn Δk và dΔk.

(Δk là chuyển vị không phải do dPk gây ra, dΔk là chuyển vị do chính nó gây ra). Nó sinh công là dA = dA_l + dA_2.

$$dA_1 = dPk\,.\,\Delta k$$

$$dA_2 = \frac{dPk.d\Delta k}{2}$$

dA_l là công khả dĩ của dPk (công trên đoạn chuyển rời Δk không phải nó gây ra).

dA_2 là công thực của dPk (công trên đoạn chuyển dời dΔk do chính nó gây ra – công biến dạng).

Lượng dA_2 là vô cùng bé bậc cao nên có thể bỏ qua.

Vậy: $$dA = dPk.\,\Delta k \qquad (5\text{-}31)$$

Ta thấy: khi chưa có lực dPk dầm có đường biến dạng 1 (hình 5-40a) và tích luỹ 1 thế năng biến dạng đàn hồi U khi có thêm lượng dPk dầm có đường biến dạng (hình

5-40b) nên trong dầm có thêm một thế năng biến dạng đàn hồi dU.

Vì dU là vi phân riêng phần của U khi riêng Pk thay đổi một lượng dPk nên theo toán học ta có:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial Pk} . dPk \qquad (5\text{-}32)$$

Theo định1ý bảo toàn năng 1ượng ta có dA = dU.

Nên từ (5-31), (5-32) ta có:

$$\Delta k = \frac{\partial U}{\partial Pk} \text{ đó là điều phải chứng minh.}$$

2- Trình tự tính chuyển vị theo đạo hàm riêng của thế năng.

- Viết phương trình mômen uốn nội lực: Mx = f(z).

- Tính thế năng biến dạng đàn hồi theo (5-30).

- Tính chuyển vị Δk theo (5-29).

*Chú ý:

+ Nếu muốn tìm chuyển vị thẳng ta đạo hàm riêng thế năng U theo lực tập trung. Nếu muốn tìm góc xoay ta đạo hàm riêng thế năng U theo nhóm mômen tập trung.

+ Nếu cần tính chuyển vị tại một điểm (hoặc một mặt cắt) nào đó mà ở đó không có lực thì ta đặt thêm một lực giả vào đó. Coi lực giả cũng như các lực khác để viết phương trình nội lực và tính thế năng U. Sau khi đạo hàm riêng U theo lực giả đó thì cho lực giả bằng không (vì thực tế nó không có)

Ví dụ: Tìm y_A và θ_A (hình 5-41a).

Giải:

- Tìm y_A :

+ Phương trình nội lực: Mx = - P.z.

+ Thế năng biến dạng đàn hồi:

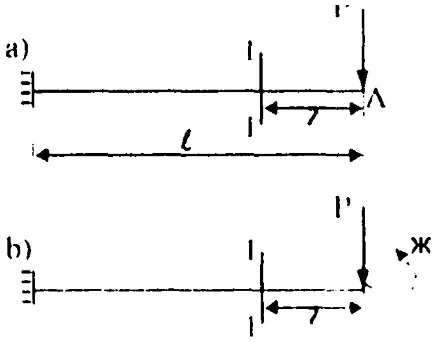
$$U = \int_0^{\ell} \frac{M_x^2}{2EJ_x} dz = \int_0^{\ell} \frac{(-P.z)^2}{2EJ_x} dz$$

$$U = \frac{P^2 \ell^3}{6EJ_x}$$

$$+ \text{ Tìm } y_A = \Delta k = \frac{\partial U}{\partial Pk} = \frac{\partial U}{\partial P}$$

P chính là lực đặt vào điểm cần tính độ võng y_A.

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P\ell^3}{3EJ_x}$$



Hình 5-41

($y_A > 0$ chứng tỏ điểm A chuyển vị xuống đúng theo chiều lực P).

- Tìm θ_A: vì mặt cắt tại A không có mômen tập trung nên ở đây ta đặt thêm một mômen giả Ж vào mặt cắt đó (chiều tuỳ ý). Ta coi P và Ж đều là ngoại lực tác dụng vào dầm (hình 5-41b).

+ Phương trình nội lực:

$$M_x = -P.z + Ж$$

+Thế năng biến dạng đàn hồi:

$$U = \int_0^{\ell} \frac{M_x^2}{2EJ_x} dz = \int_0^{\ell} \frac{(-P.z + Ж)^2}{2EJ_x} dz$$

$$= \frac{1}{2EJ_x}\left(P^2 \int_0^{\ell} z^2 dz + Ж^2 \int_0^{\ell} dz - 2PЖ \int_0^{\ell} z dz \right)$$

$$= \frac{1}{2EJ_x} \left(\frac{P^2.\ell^3}{3} + Ж^2 . \ell - P . Ж . \ell^2 \right)$$

+ Tìm θ_A:

Đạo hàm thế năng U theo mômen giả Ж.

$$\frac{\partial U}{\partial Ж} = \frac{1}{2EJ_x}(0 + 2Ж . \ell - P . \ell^2)$$

Cho mômen giả bằng không (vì nó không có); ta có:

$$\theta_A = \Delta k = \left. \frac{\partial U}{\partial Ж} \right|_{Ж = 0} = - \frac{P\ell^2}{2EJ_x}$$

($\theta_A < 0$ chứng tỏ mặt cắt tại A xoay ngược chiều mômen Ж đã giả thiết).

3- Nhận xét:

Phương pháp tìm chuyển vị theo đạo hàm riêng của thế năng không thuận tiện đối với các trường hợp:

- Dầm có nhiều đoạn tải trọng.

- Dầm có độ cứng EJ thay đổi.

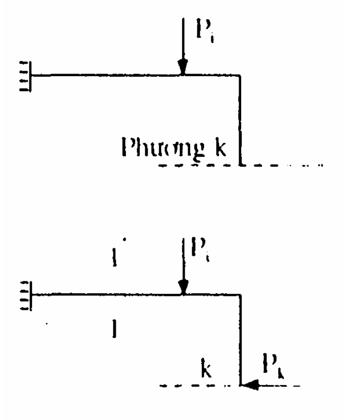
- Chuyển vị cần tìm ở chỗ không có lực.

§4- TÍNH CHUYỂN VỊ THEO TÍCH PHÂN MO:

1 - Công thức Mo:

Cho một hệ đàn hồi chịu các lực: P_i (i = 1, 2,... n). Tìm chuyển vị theo phương k bất kỳ? (hình 5-42a).

Tiến hành: Đặt thêm vào hệ đã cho một lực giả P_k theo phương k (hình 5-42b). Coi P_k cũng là ngoại lực có vai trò như P_i.



Hình 5-42

Mômen uốn nội lực tại mặt cắt 1-1 trong hệ hình 5-42b là:

$$M_x = M_p + M_k$$

Mp là mômen uốn nội lực do tải trọng thật Pi gây ra.

Mk là mômen uốn nội lực do tải trọng giả Pk gây ra.

Nếu bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc, lực cắt thì thế năng biến dạng đàn hồi tích luỹ trong hệ là:

$$U = \sum\int_0^l \frac{M_x^2}{2EJ_x}dz = \sum\int_0^l \frac{(Mp + Mk)^2}{2EJ_x}dz$$

hay $$U = \frac{1}{2EJ_x}\left(\sum\int_0^l M_p^2\,dz + \sum\int_0^l M_k^2\,dz + \sum\int_0^l 2M_k.Mp.dz\right) \quad (a)$$

Gọi $\overline{Mk}$ là nội lực đơn vị do Pk = 1 gây ra thì:

$$Mk = \overline{Mk}\ .Pk$$

Thay (b) vào (a) ta có:

$$U = \frac{1}{2EJ_x}\left(\sum\int_0^l M_p^2.dz + \sum\int_0^l (\overline{Mk}\ .Pk)^2dz + \sum\int_0^l 2\overline{Mk}\ .Pk.Mpdz\right).$$

Theo định nghĩa Catilianô, chuyển vị theo phương k sẽ là:

$$\Delta k = \left.\frac{\partial U}{\partial Pk}\right|_{Pk=0} = \sum \int_0^l \frac{\overline{Mk}.Mp}{EJ_x}\, dz$$

Cho Pk = 0 vì thực tế nó không có:

Vậy: $$\boxed{\Delta k = \sum \int_0^l \frac{\overline{Mk}.Mp}{EJ_x}\, dz} \qquad (5\text{-}33)$$

(5-33) là công thức tính chuyển vị đối với dầm vào khung chịu uốn của Mo.

Trong đó:

$\overline{Mk}$ là nội lực đơn vị do lực đơn vị Pk = 1 gây ra.

Mp là nội lực do tải trọng thật (có sẵn trên hệ) gây ra.

EJ_x là độ cứng dầm (khung) chịu uốn.

* Chú ý: trong công thức (5-33) ta đã không kể đến ảnh hưởng của lực dọc, lực cắt tới chuyển vị tác dụng của nó tới chuyển vị là không đáng kể như với mômen nội lực Mx.

2- Trình tự tính chuyển vị theo tích phân Mo:

- Viết phương trình mômen uốn nội lực do tải trọng thật (có sẵn trên hệ) gây ra: $Mp = Mx = f_1 (z)$.

- Tạo "hệ giả" bằng cách đặt lực đơn vị Pk = 1 (hoặt $Ж_k$ vào điểm (hoặc mặt cắt) cần tính chuyển vị.

Viết phương trình nội lực đơn vị đo lực đơn vị gây ra:

$$\overline{Mk} = f_2 (z)$$

- Thay Mp, $\overline{Mk}$ vào (5-33) để tính Δk.

Chú ý: Nếu cần tìm chuyển vị thẳng ta đặt lực đơn vị Pk = 1 vào điểm cần tính chuyển vị. Nếu cần tính góc xoay ta đặt mômen đơn vị $Ж_k = 1$ vào mặt cắt cần tính góc xoay (chiều tuỳ ý).

Ví dụ 1 : Tìm y_A, θ_A đối với dầm (hình 5-43a) cho EJ = const.

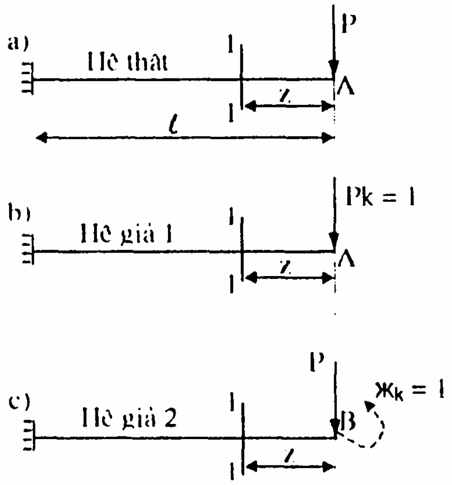
Giải:

Tìm y_A:

+ Phương trình nội lực ở hệ thật:

$$Mp = Mx = - P.z$$

+ Đặt Pk = 1 vào điểm A (chiều tuỳ ý)



Hình 5-43

Nội lực đơn vị ở hệ giả 1(hình 5-43b).

$$Mk = -P_K \cdot z = -z$$

$$+ \text{Tìm } y_A = \Delta k = \int_0^l \frac{Mk.Mp}{EJ} dz$$

$$y_A = \int_0^l \frac{(-z).(-P.z)}{EJ} dz = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

($y_A > 0$ chứng tỏ điểm A chuyển vị xuống đúng chiều Pk = 1 đã giả thiết)

- Tìm θ_A:

+ Phương trình nội lực δ hệ thật: Mp = - P.z.

+ Đặt mômen đơn vị $Ж_k = 1$ vào tiết diện A (chiều tuỳ ý). Nội lực đơn vị ở hệ giả 2 là:

$$\overline{Mk} = Ж_k = 1$$

+ Thay vào (5-33) ta có:

$$\theta_A = \Delta k = \int_0^l \frac{1.(-Pz)}{EJ} dz = -\frac{Pl^2}{2EJ}$$

($y_A < \theta$ chứng tỏ mãt cắt tại A xoay ngược chiều với mômen đơn vị $Ж_k = 1$ đã giả thiết).

<u>Ví dụ 2</u>: Tìm y_k đối với khung (hình 5-44a).

Giải:

- Phương trình nội lực do tải trọng thật (hình 5-44a):

Đoạn AB : Mp = P.z (0 ≤ z ≤ 2a)

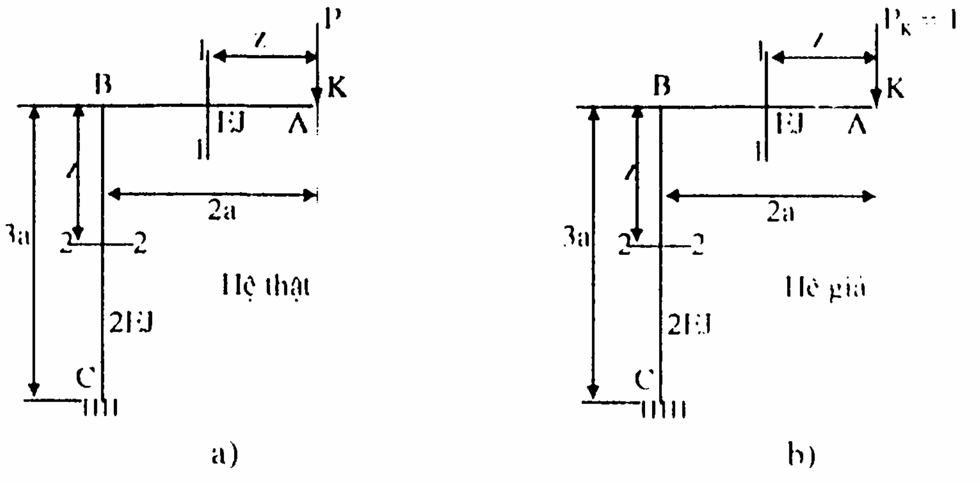
Đoạn BC: Mp = 2Pa (0 ≤ z ≤3a)

(giả thiết mômen căng thớ ngoài dương).

- Phương trình nội lực đơn vị do Pk = 1 gây ra đặt vào điểm tính chuyển vị A (hình 5-44b):

Đoạn AB: $\overline{Mk} = 1 \cdot z = z \qquad (0 \le z \le 2a)$

Đoạn CD: $\overline{Mk} = 2a \qquad (0 \le z \le 3a)$



Hình 5-44)

- Tính y_K :

$$y_K = \Delta k = \sum \int \frac{\overline{M}k.Mp}{EJ} dz = \int_0^{2a} \frac{(z).(P.z)}{EJ} dz + \int_0^{3a} \frac{2a.2Pz}{2EJ} dz$$

$$y_K = 8{,}7\ \frac{Pa^3}{EJ}$$

($y_k > 0$ chứng tỏ điểm k chuyển vị xuống theo đúng chiều lực $P_k = 1$ đã giả thiết)

3- Nhận xét:

Phương pháp tính chuyển vị theo tích phân Mo có nhược điểm là phải phân đoạn để lấy tích phân (đối với trường hợp hệ đang xét có nhiều đoạn tải trọng và hệ có nhiều đoạn độ cứng EJ khác nhau).

Để khắc phục nhược điểm trên ta xét cách tính chuyển vị sau:

§5- PHÉP NHÂN BIỂU ĐỒ VERÊXAGHIN THÍNH CHUYỂN VỊ.

1- Công thức Verêxaghin.

Cho hai hàm F(z) và f(z) cùng biến thiên trong khoảng $|0,l|$ và thoả mãn tích phân $I = \int_0^l F(z).f(z)\,dz$.

Nếu hai hàm F(z) và f(z) thoả mãn 3 điều kiện (hình 5-4).

1- F(z), f(z) liên tục trong khoảng $|0,l|$.

2- F(z), f(z) liên tục trong khoảng $|0,l|$.

3- f(z) 1à hàm bậc nhất (hoặc nhỏ hơn bậc nhất) có dạng:

$$f(z) = b + k\,(z).$$

Ý nghĩa hình học của điều kiện 1 là trong khoảng $|0,l|$ hai hàm F(z) và f(z) không được có điểm dừng (bước nhảy).

Ý nghĩa hình học của điều kiện 2 là trong khoảng $|0,l|$ 2 hàm F(z), f(z) không có điểm gẫy.

Lúc đó tích phân I sẽ được tính theo công thức:

$$\boxed{I = (F).(f) = \Omega.\eta_c} \qquad (5\text{-}34)$$

Trong đó:

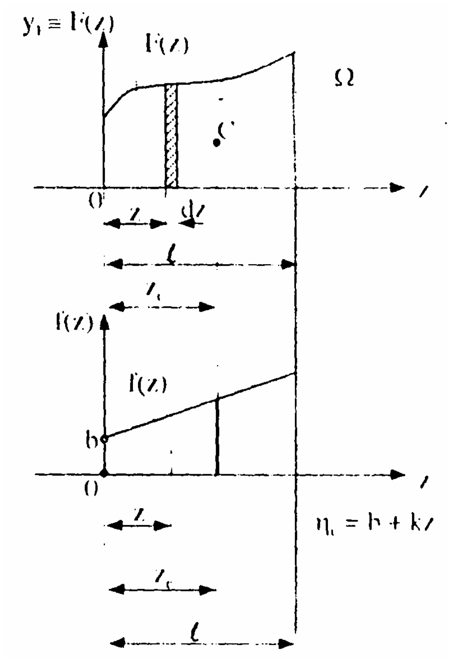
(F) là biểu đồ dưới hàm F(z).

(f) là biểu đồ dưới hàm f(z).

Ω là diện tích của biểu đồ dưới hàm F(z) có trọng tâm C (hình 5-45a).

η_c là tung độ ứng với trọng tâm của diện tích Ω và lấy trên biểu đồ dưới hàm f(z) (hình 5-45b).

Công thức (5-34) gọi là công thức nhân biểu đồ tổng quát của Verêxaghin.



Hình 5-45

Chứng minh:

$$I = \int_0^l F(z).f(z)dz \qquad \text{nhưng } f(z) = b + kz$$

nên: $$I = b\int_0^l F(z)dz + k\int_0^l z.F(z).dz$$

Về ý nghĩa hình học ta thấy $\int F(z)dz$ biểu diễn diện tích dưới hàm F(z) trong khoảng $|0,l|$:

Tức là: $$\int_0^l F(z)dz = \Omega \qquad \text{(hình 5-45a).}$$

Tích phân: $$\int_0^l z.F(z)dz = \int_\Omega z.d\Omega$$

Trong đó $d\Omega = F(z).dz$ (hình 5-45a).

Ta lại thấy tích phân $\int_{\Omega} z d\Omega$ biểu diễn mômen tĩnh của điện tích Ω đối với Ω trục y_1.

$$S_{y1} = \int_{\Omega} z d\Omega = \Omega . z_c$$

$$\text{Vậy: } I = b . \Omega + k\, \Omega . z_c = \Omega\,(b + k z_c) = \Omega\,.\,\eta_c$$

Đó là điều phải chứng minh.

Áp dụng công thức (5-34) vào công thức Mo (5-33) ta có:

$$\boxed{\Delta k = (\overline{M}_k) . (M_P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{EJ_i} \Omega_i . \eta_i} \quad (5\text{-}35)$$

(5-35) là công thức tính chuyển vị theo nhãn biểu đồ verêxaghin đối với dầm, khung chịu uốn.

Trong đó:

$(\overline{M}_k)$ là biểu đồ mômen đơn vị do P_k = I (hoặc $Ж_K$ = I) gây ra.

(M_P) là biểu đồ mômen do tải trọng thật (có sẵn trên hệ) gây ra.

Ω- là phần diện tích của biểu đồ (M_P) trong đoạn thứ i.

η- 1là tung độ ứng với trọng tâm Ω_i lấy trên biểu đồ $\overline{M_K}$.

EJ – là độ cứng trong đoạn thứ i của dầm (khung).

Cũng như (5-34) khi sử dụng công thức (5-35) tính chuyển vị phải chú ý ba điều kiện:

- Biểu đồ (M_P), $(\overline{M}_k)$ không có bước nhảy trong cùng một khoảng.
- Biểu đồ (M_P), $(\overline{M}_k)$ không có điểm bị gẫy trong cùng một khoảng
- Biểu đồ $(\overline{M}_k)$ phải nhỏ hơn hay bằng bậc nhất.

2- Trình tự tính chuyển vị theo nhân biểu đồ VeRêxaghin:

- Vẽ biểu đồ (M_P) do tải trọng thật (có sẵn trên hệ) gây ra.

- Đặt 1 lực đơn vị P_k = 1 (hoặc mômen đơn vị $Ж_K$ = 1) vào điểm tính chuyển vị (hoặc mặt cắt tính góc xoay). Vẽ biểu đồ mômen đơn vị $(\overline{M}_P)$ do nó gây ra.

Áp dụng công thức (5-35) tính chuyển vị Δk.

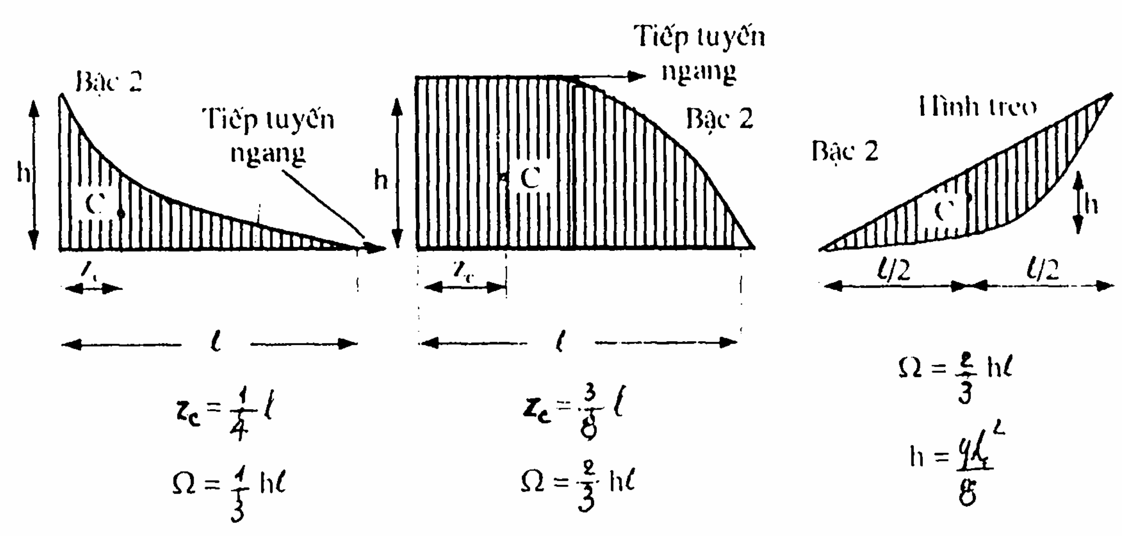
3- Chú ý khi nhân biểu đồ.

- Qui ước Δk > 0 nếu Ω và η_c cùng nằm về một phía của trục chuẩn và ngược lại.

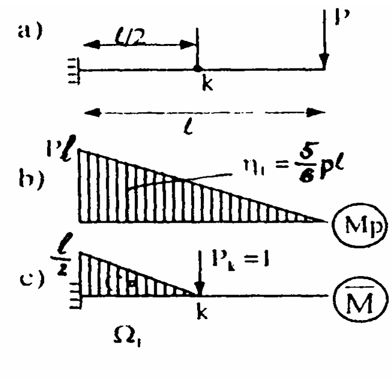
- Nếu biểu đồ M_P có dạng nhỏ hơn hay bằng bậc nhất ta có thể lấy tung độ η_c trên biểu đồ M_P để nhân với diện tích Ω trên biểu đồ $\overline{M}_P$

- Nếu biểu đồ M_P có dạng phức tạp ta có thể chia diện tích Ω của biểu đồ này ra làm nhiều hình đơn giản có diện tích Ω_i đã biết để dễ nhân biểu đồ.

Đó là các hình 5-46.



Hình 5-46



Hình 5-47

+ Tính chuyển vị:

4- Ví dụ:

<u>*Ví dụ 1:*</u> Tìm y_k đối với dầm cho trên hình 5-47a.

Cho EJ = const.

Giải:

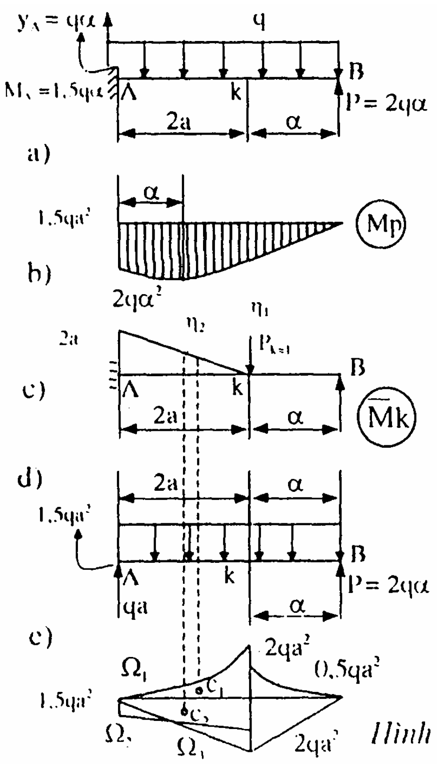
+ Vẽ biểu đồ M_P do tải trọng thật có sẵn trên hệ gây ra (hình 5-47b).

+ Đặt P_k = 1 và điểm k trong hệ giả. Biểu đồ mômen đơn vị $\overline{M}_k$ do nó gây ra chỉ trên hình 5-47c.

$$y_k = \Delta k = \overline{M}k \,.\, Mp = \frac{1}{EJ}\Omega_1 \,.\, \eta_1 = \frac{1}{EJ}\left(\frac{\ell}{2}\,\frac{\ell}{2}.\,\frac{\ell}{2}\right).\ \frac{5}{6}P\ell$$

$$y_k = \frac{5}{48}\,.\,\frac{P\ell^3}{EJ}$$ ($y_k > 0$ chứng tỏ điểm k chuyển vị xuống theo chiều $P_k = 1$ đã giả thiết).

Ví dụ 2: Tìm y_k đối với dầm ở hình 5-48a. EJ = const



Giải:

+ Vẽ biểu đồ Mp do tải trọng thật gây ra (Hình 5-48b).

+ Vẽ biểu đồ $\overline{M}_k$ do $P_k = 1$ gây ra (hình 5-48c). Ta thấy hai biểu đồ M_P và $\overline{M}_k$ không thể nhân với nhau vì tại điểm k biểu đồ $\overline{M}_k$ có điểm gẫy.

Trường hợp này muốn nhận được ta phải vẽ lại biểu đồ M_P

Hệ hình 5-48a có thể biến đổi thành hệ hình 5-48d. Ta vẽ biểu đồ nội lực do từng tải trọng tác dụng riêng sẽ gây ra đối với hai đoạn dầm Ak và Bk (tưởng tượng k là một ngàm của hai dầm công xôn Ak và Bk). Các biểu đồ nội lực riêng rẽ đó được chỉ trên hình 5-48c).

$$\text{Vậy:}\quad y_k = \overline{Mk}\ .\ Mp' = \frac{1}{EJ}\,|\Omega_1.\,\eta_1 - \Omega_2.\,\eta_2 - \Omega_3\eta_3\,|$$

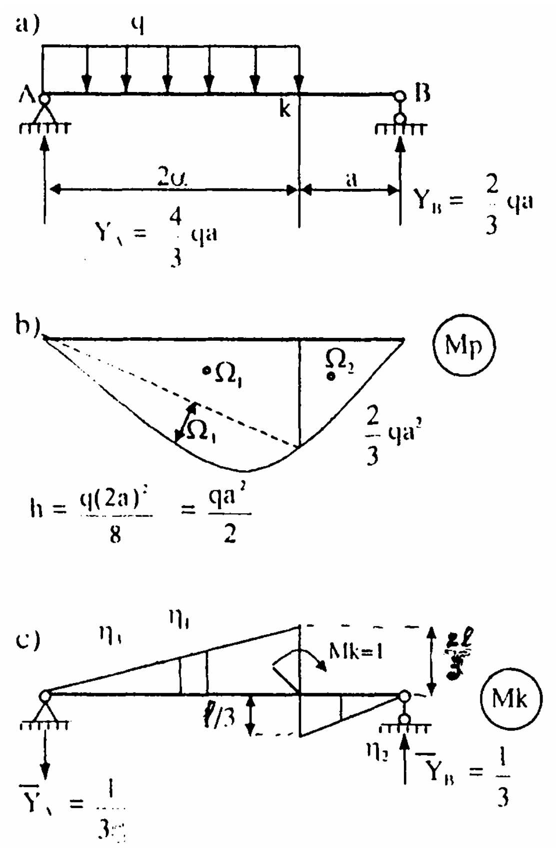
$$y_k = \frac{1}{EJ}\,\left|\left(\frac{1}{3}\ .\ 2\,qa^2.2a\right).\ \frac{1}{4}\ 2a - \left(\frac{1}{2}\,2qa^2\ .\ 2a\right).\ \frac{1}{3}\ 2a\ -\ 1.5\ qa^2.2a.a\right|$$

$$y_k = \frac{11}{3}\,\frac{qa^4}{EJ}$$

($y_k < 0$ chứng tỏ điểm k chuyển vị ngược chiều với lực $P_k = 1$ giả thiết: chuyển vị lên).

Ví dụ 3. Tìm góc xoay tại mặt cắt k (θ_k) đối với dầm hình 5-49a.

EJ = const.



Giải:

+ Vẽ biểu đồ (M_P) do tải trọng thật gây ra. (hình 5-49b).

+ Vẽ biểu đồ $(\overline{M}_k)$ do Mk = 1 đặt vào mặt cắt tại k gây ra (hình 5-49c).

+ Tìm góc xoay

$$\theta_k = \Delta k = (\overline{M}k) \,.\, (Mp)$$

$$\theta_k = \frac{1}{EJ}\left[-\Omega_1.\eta_1 + \Omega_1.\eta_1 - \Omega_2.\eta_2\right]$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[-\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}qa^2.2a\right).\frac{2}{3}.\frac{2}{3} + \right.$$

$$+\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}qa^2.a\right)\frac{2}{3}.\frac{1}{3}$$

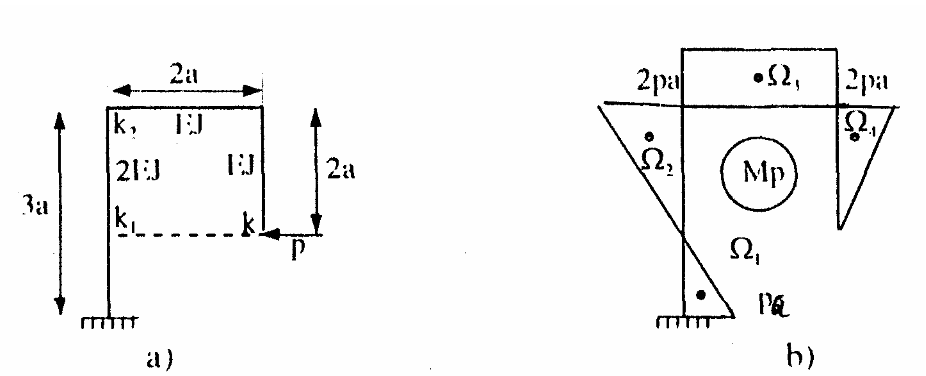
$$\left.-\left(\frac{2}{3}.\frac{qa^2}{2}.2a\right).\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\right].$$

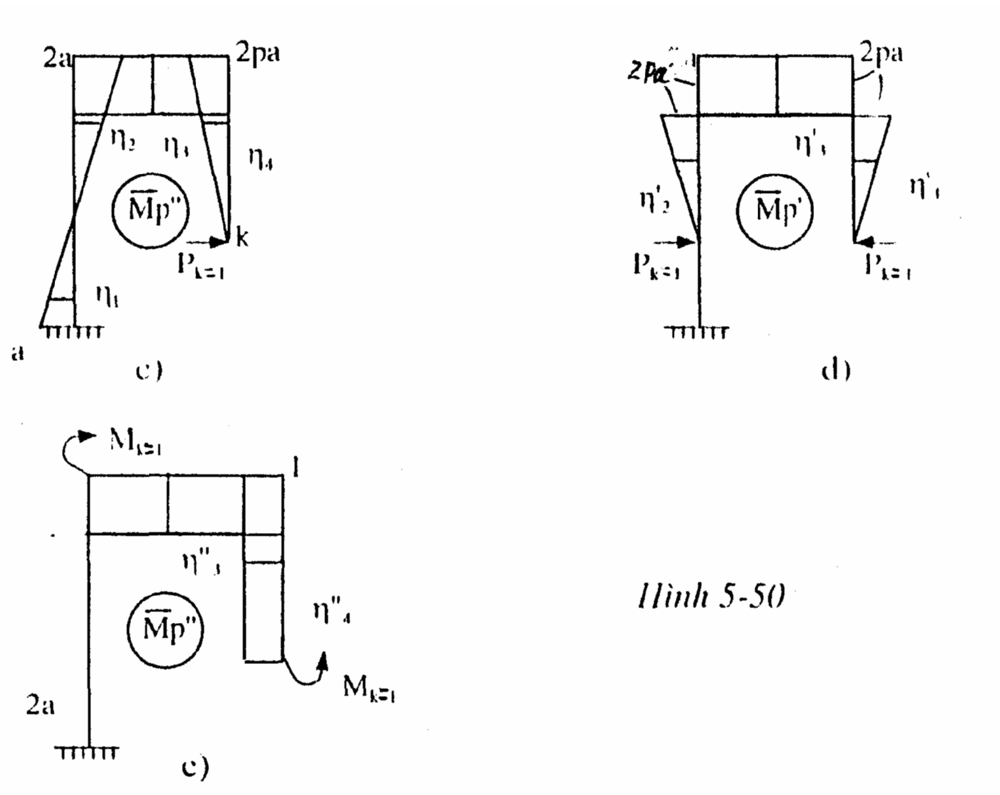
$$\theta k = -\frac{12}{27}.\frac{qa^2}{EJ}$$

Hình 5-49

($\theta_k < 0$ chứng tỏ mặt cắt tại k xoay ngược chiều với mômen đơn vị $M_k = 1$ đã giả thiết).

<u>Ví dụ 4</u>: Tìm chuyển vị ngang của điểm k (x_k), chuyển thẳng tương đối hai điểm k và k_1 (Δ_{kk1}), góc xoay trong giữa hai mặt cắt tại k và k_2 (θ_{kk2}) - hình 5-50a).





Hình 5-50

Giải:

- Tìm Xk: Đặt lực Pk = 1 vào điểm k theo phương ngang. Biểu đồ $\overline{M}_k$ chỉ trên hình 5-50b.

$$Xk = \overline{M}k \cdot Mp = -\frac{1}{2EJ}[\Omega_1 . \eta_1 + \Omega_2 . \eta_2] - \frac{1}{2EJ}[\Omega_3 . \eta_3 + \Omega_4 . \eta_4]$$

$$= -\frac{1}{2EJ}[(\frac{1}{2}pa.a).\ \frac{2}{3}a + (\frac{1}{2}2pa.2a).\ \frac{2}{3}2a] -$$

$$-\frac{1}{2EJ}[(2Pa.2a).\ 2a + (\frac{1}{2}2Pa.2a).\frac{2}{3}2a] = -12{,}2\ \frac{Pa^3}{EJ}$$

(Xk < θ chứng tỏ điểm k chuyển vị ngược chiều lực $P_{k=1}$ là giả thiết

- Tìm Δ_{kk1}:

Đặt 2 lực $P_{k=1}$ vào hai điểm k và k_1 (trực đối, chiều tuỳ ý). Biểu đồ M_P do nó gây ra chỉ trên hình 5-50d.

$$\Delta kk_1 = (\overline{M}k)(Mp) = \frac{1}{2EJ}\,\Omega_2.\eta'_2 + \frac{1}{EJ}\,(\Omega_1.\eta'_1 + \Omega_1.\eta'_1]$$

$$= \frac{1}{2EJ}\,(\frac{1}{2}.\,2Pa.2a).\,\frac{2}{3}\,2a + \frac{1}{EJ}\,[(2Pa.2a).\,2a +$$

$$+ (\frac{1}{2}.\,2Pa.2a).\,\frac{2}{3}\,2a] = 12\,\frac{Pa^3}{EJ}$$

($\Delta_{kk1} > 0$ chứng tỏ 2 điểm k và k_1 xích lại gần nhà theo chiều 2 bậc $P_{k=1}$ đã giả thiết).

- Tìm θ_{kk2} :

Đặt hai mômen đơn vị Mk = 1 vào hai mặt cắt tại k và k_2 (chiều ngược nhau) - biểu đồ $(\overline{M}_k)''$ do nó gây ra chỉ trên hình 5-50c.

$$\theta_{kk2} : (\overline{M}k)''\,(Mp) = \frac{-1}{EJ}\,(\Omega_3.\eta_3'' + (\Omega_4.\eta_4'']$$

$$= -\frac{1}{EJ}[(2Pa.2a).\,1 + (\frac{1}{2}\,2Pa.2a).\,1]$$

$$\theta_{kk2} = -\frac{6Pa^2}{EJ}$$

Chương 6
XOẮN THUẦN TUÝ THANH THẲNG

§1- CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Trong chế tạo máy nói riêng và cơ khí nói chung, ta thường gặp một số chi tiết chịu xoắn như trục truyền, mũi khoan,...

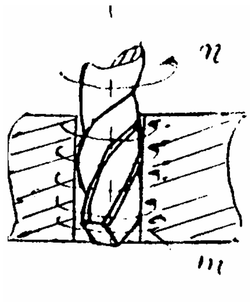
Các dạng chịu lực về xoắn thường kem theo uốn hoặc nén. Ở chương này ta chỉ xét riêng sự xoắn.

1- Ngoại lực xoắn:

Ngoại lực xoắn thường gồm 2 dạng:

- Ngoại lực xoắn phân bố (hình 6-1) thường gặp ở dạng mũi khoan khoan và chi tiết (ký hiệu: m - đơn vị; kNm/m,...).

- Ngoại lực xoắn tập trung (ký hiệu Ж) thường gặn ở dạng các mômen xoắn tập trung. Đơn vị của Ж là: N.m, KNm,... loại này thường ở dạng:



Hình 6.1

- Do các ngẫu lực;

- Do dời các lực vòng ở các bánh răng, bánh đai, bánh xích...

- Do công suất (N) của động cơ truyền tới.

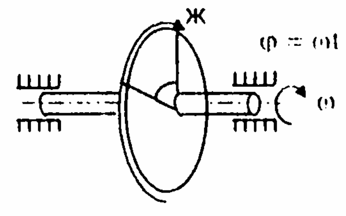
Nhiều trường hợp ngoại lực xoắn được tính theo công suất và số vòng quay của trục.

Xét một puli (hình 6-2) chịu ngoại lực xoắn Ж quay với tộc độ góc ω.

Công quay puli: A = Ж. φ = Ж.ωt.

Công suất truyền vào puli.

$$N = \frac{A}{t} = Ж \cdot \omega$$



Hình 6.2

Vậy ngoại lực xoắn:

$$Ж = \frac{N}{\omega} \qquad (6.1)$$

Trong đó: N - có đơn vị w

ω- có đơn vị 1/s

Ж - có đơn vị N.m

n - là số vòng quay của trục puli (v/ph)

Thì: $\omega = \frac{\pi.n}{30}$

Thay vào (6.1): $\text{ж} = 9,55 \frac{N}{n}$ (6-2)

Trong đó: N - có đơn vị w

n - có đơn vị v/ph

Ж - có đơn vị; N.m

($1kw = 10^3$ w) nếu N tính bằng mã lực thì 1 mã lực = 7.60 N.m.

thì: $\text{Ж} = 7162 \frac{N}{n}$ (N.m)

2- Nội lực xoắn :

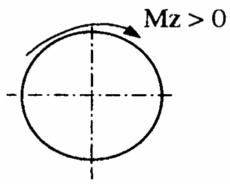
- Định nghĩa: Một thanh thẳng gọi là chịu xoắn thuần tuý nếu mọi mặt cắt ngang của nó chỉ có một thành phần mômen xoắn nội lực Mz.

Đơn vị của Mz: N.m ; Ncm ; kNm...

- Cách xác định Mz: bằng phương pháp mặt cắt.

- Qui ước dấu của Mz.

Nếu nhìn vào mặt cắt của phần đang xét thấy Mz quay cùng chiều kim đồng hồ thì Mz > 0 và ngược lại (hình 6-3).



Hình 6.3

<u>Biểu đồ nội lực Mz:</u>

Cũng như phần kéo nén nếu uốn, cần phải tìm mặt cắt nguy hiểm khi xoắn thuần tuý đó là các mặt cắt có trị số Mz_{max}. Vậy phải vẽ biểu đồ Mz.

Để vẽ biểu đồ Mz ta cũng dùng phương pháp mặt cắt.

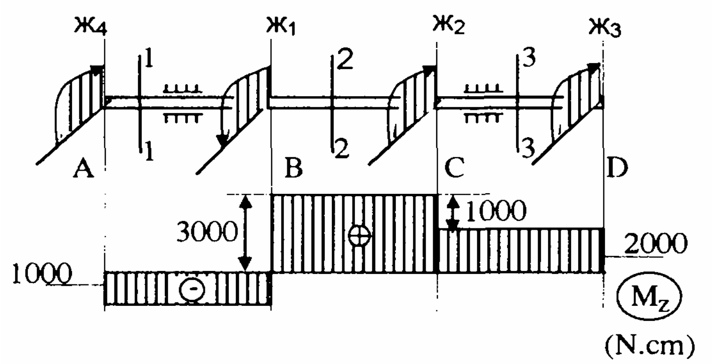
Ví dụ 1:

Vẽ biểu đồ Mz và tìm mặt cắt nguy hiểm cho trục chịu xoắn (hình 6-4a). Sơ đồ ngoại lực như hình vẽ.

$\text{Ж}_1 = 4000$ Ncm;

$\text{Ж}_2 = 1000$ Ncm

$\text{Ж}_3 = 2000$ Ncm



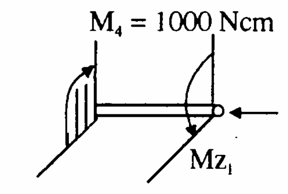
Hình 6-4

Giải: Bỏ qua ma sát ở các ổ trục ta có:

$$\text{Ж}_1 - \text{Ж}_2 - \text{Ж}_3 - \text{Ж}_4 = 0$$

Suy ra: $\text{Ж}_4 = \text{Ж}_1 - \text{Ж}_2 - \text{Ж}_3 = 1000$ Ncm

Xét 3 mặt cắt thuộc 3 đoạn AB, BC, CD.



Hình 6-5

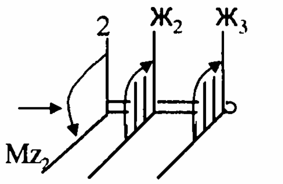
+ Xét mặt cắt 1-1:

Khảo sát phần trái cho đơn giản (hình 6-5)

Để phần này cân bằng Mz_2 phải ngược chiều với Ж_2 và Ж_3.

Nhìn vào mặt cắt của phần này (nhìn từ phải sang trái) thấy Mz_1 quay ngược chiều kim đồng hồ.

Vậy: $Mz_1 = -\text{Ж}_4 = -1000$ Ncm



Hình 6-6

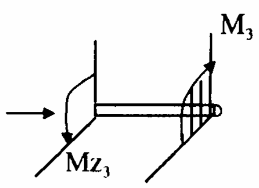
+ Xét mặt cắt 2-2:

Khảo sát phần phải (hình 6-6).

Để phần này cân bằng M_{Z2} phải ngược chiều với $\text{Ж}_2 + \text{Ж}_3$

Nhìn vào mặt cắt của phần này (nhìn từ trái sang phải) thấy M_{Z2} quay cùng chiều kim đồng hồ:

Vậy: $M_{Z2} = +3000$ Ncm



Hình 6-7

+ Xét mặt cắt 3-3

Khảo sát phần phải cho đơn giản. (hình 6.7)

Tương tự như ở mặt cắt 2-2 ta thấy:

$M_{Z3} = +\text{Ж}_3 = +2000$ Ncm

Biểu đồ Mz vẽ ở hình 6-4b.

Trên biểu đồ ta thấy đoạn BC của trục có trị số:

$|Mz_{max}| = 3000$ Ncm

Thường dùng trị số này để tính toán bền và cứng.

Chú ý: Tại chỗ có mômen xoắn tập trung (điểm A, B, C, D) biểu đồ Mz có bước nhảy. Trị số bước nhảy bằng đúng trị số các mômen xoắn tập trung, $Ж_1$;$Ж_2$;$Ж_3$; $Ж_4$ (xem hình 6-4).

§2- XOẮN THUẦN TUÝ THANH MẶT CẮT TRÒN

1- Thí nghiệm xoắn:

Hình 6-8a là dạng một thanh tròn trước khi chịu xoắn.

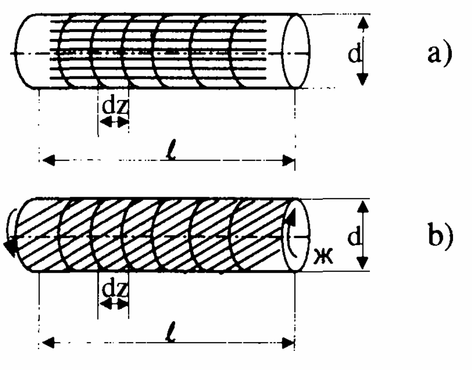
Hình 6-8b là dạng sau khi chịu xoắn. Các đường kẻ song song với trục thanh bị lệch xiên đi.

Các hiện tượng sau thí nghiệm:

- Khoảng cách các đường vòng quanh chu vi (dz) và chiều dài ℓ của thanh không thay đổi.

- Đường kính d của mặt cắt không thay đổi.

- Khoảng cách các đường sinh (bị lệch xiên) không thay đổi.



Hình 6-8

2- Các giả thuyết:

Từ hàng loạt thí nghiệm xoắn thuần tuý thanh thẳng mặt cắt tròn này ta đi đến kết luận dưới dạng các giả thuyết sau:

- Giải thuyết Béc nuli các mặt cắt ngang của thanh luôn phẳng và vuông góc với trục thanh trước và sau biến dạng.

- Khoảng cách giữa hai mặt cắt ngang, chiều dài của thanh trước và sau biến dạng luôn không đổi (dz = const; ℓ = const).

- Bán kính của một điểm bất kỳ trên mặt cắt luôn không đổi trước và sau biến dạng (p = const).

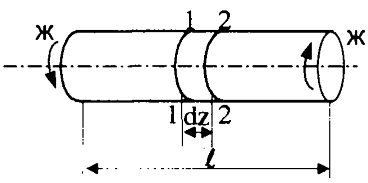
- Các thớ dọc không tác dụng lẫn nhau trong khi biến dạng.

- Vật liệu tuân theo định luật Húc: $\tau = G\,\gamma$

3- Ứng suất trên mặt cắt ngang.

Xét: 1 thanh trân chịu xoắn thuần tuý (hình 6-9).

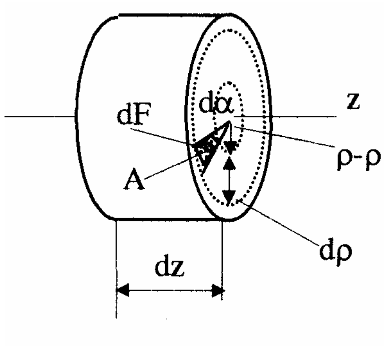
Để khảo sát ta tưởng tượng dùng hai mặt cắt ngang 1-1 và 2-2 tách ra một đoạn thanh có chiều dài vô cùng bé dz.



Hình 6-9

Xét: Ứng suất tại 1 điểm A trên mặt?

Để khảo sát xung quanh điểm A ta tách ra một phân tố vô cùng bé dz tạo bởi 2 tia hợp với nhau góc dα và hai vòng tròn đồng tâm có bán kính ρ và ρ- dρ (hình 6-10). Phân tố khảo sát có bề dày dz được vẽ tách ra ở hình 6- 11.



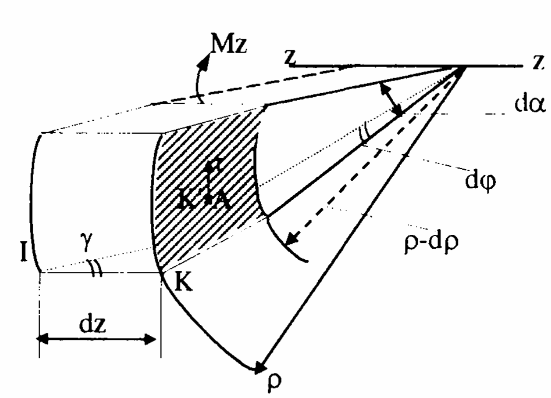
Hình 6-10

Xét một điểm K trên phân tố. Sau khi mặt cắt chịu xoắn đường sinh IK bị lệch xiên thành IK'. Góc γ tạo bởi hai đường đó gọi là góc trượt.

Ta bắt đầu khảo sát ứng suất tại A theo trình tự sau:

- Xét xem có loại ứng suất gì tác dụng lên phân tố dF.

+ Từ giả thiết của Béc nu li mặt cắt luôn phẳng và vuông góc với trục và giả thuyết khoảng cách dz = cosdt, ta kết luận không thể có ứng suất pháp theo phương (σ_z = 0).



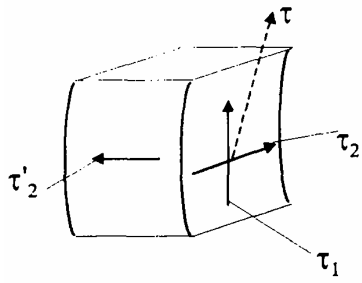
Hình 6-11

+ Từ giả thuyết các thớ dọc không tác dụng lẫn nhau trong khi biến dạng nên không thể có ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến (σ_t = 0) và ứng suất pháp theo phương pháp tuyến (σ_n = 0).

+ Mọi điểm trong phân tố dF chỉ bị di chuyển trong mặt phẳng của nó. Vậy trên phân tố dF chỉ có ứng suất tiếp τ là duy nhất.

+ Vấn đề thứ hai là tìm phương, chiều ứng suất tiếp τ?

Giả sử phương của τ là bất kỳ. Ta có thể phân tích nó làm hai thành phần vuông góc với bán kính τ_1 và song song với bán kính τ_2 (hình 6- 12).



Hình 6-12

Theo luật đối ứng sẽ có thành phần τ'_2 đối ứng với τ_2 Nhưng theo phương dọc trục không có biến dạng nên không thể có thành phần τ'_2. Do đó thành phần $\tau_2 = 0$.

Vậy $\tau \equiv \tau_1$ có phương vuông góc với bán kính ρ.

Từ hình 6-11 ta thấy vi phân nội lực tác dụng lên diện tích vô cùng bé dF là τ.dF. Lực này gây nên một vi phân mômen đối với trục z là dMz = ρ.τ.dF. Các vi phân mômen dMz phải cùng chiều với mômen xoắn tổng hợp Mz. Để thoả mãn vấn đề này ứng suất tiếp τ phải có chiều theo chiều quay của Mz.

- Vấn đề thứ ba là tìm trị số của τ?

Ta có: $dMz = \rho.\tau dF$

Vậy: $Mz = \int_F \rho.\tau dF$ (6-3)

Từ giả thiết vật liệu tuân theo định luật Húc nên $\tau = G.\gamma$ (6.2). Trong đó G là 1 hằng số phụ thuộc vào từng loại vật liệu. Người ta đặt lên G là môduyn đàn hồi trượt của vật liệu.

Ví dụ: Đối với thép $G = 0{,}8.\ 10^6\ N/cm^2$.

γ gọi là góc xoắn tỷ đối.

Trên hình 6-11 ta thấy vì góc γ là vô cùng bé nên:

$$\gamma \approx t_g\gamma = \frac{kk'}{Ik} = \frac{\rho d\varphi}{dz}$$

Vậy: $$\tau = G.\ \rho\ .\ \frac{d\varphi}{dz} \qquad (6\text{-}5)$$

Thay (6-5) vào (6-3):

$$Mz = \int_F G\ .\ \rho^2\ \frac{d\varphi}{dz} dF = G\ \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2\ dF$$

hay: $Mz = G.\ \frac{d\varphi}{dz}\ .\ Jp$ ($Jp = \int_F \rho^2\ dF$; mômen quán tính cực).

Vậy: $$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{Mz}{G.Jp} \qquad (6\text{-}6)$$

$d\varphi$ là góc xoắn tuyệt đối ứng với chiều dài dz.

Vậy: tỷ số $\frac{d\varphi}{dz}$ gọi là góc xoắn tỷ đối (góc xoắn trên một đơn vị chiều dài). Ký hiệu $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$

Vậy: $$\boxed{\theta = \frac{Mz}{G.Jp}} \qquad (6\text{-}6')$$

Đơn vị của góc xoắn tỷ đối θ là Rad/m

Thay (6-6) vào (6-5) ta có:

$$\boxed{\tau = \frac{Mz}{Jp}\ .\ \rho} \qquad (6\text{-}7)$$

(6-7) là công thức tính ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang.

Trong đó: Mz - là mômen xoắn nội lực.

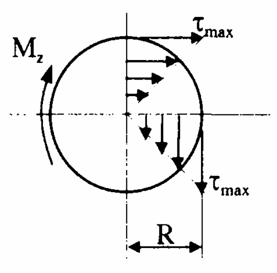
Jp - là mômen quán tính cực (mặt cắt tròn Jp = 0,1 D^4)

ρ - là bán kính của điểm cần tính ứng suất tiếp.

Đơn vị của τ là N/cm^2 ; N/m^2....

4- Biểu đồ ứng suất tiếp - mặt cắt hợp lý:

a) Biểu đồ ứng suất tiếp:



Hình 6-13

Xét biểu thức: $\tau = \dfrac{Mz}{Jp}.\rho$.

Ta thấy tại một mặt cắt $\dfrac{Mz}{Jp}$ = const nên τ phụ thuộc bậc 1 với bán kính ρ.

Quan hệ bậc 1 đó được vẽ trên biểu đồ ứng suất tiếp (hình 6- 13).

Tại tâm mặt cắt (ρ = 0); τ = 0.

Tại chu vi mặt cắt (ρ_{max} = R).

$$\tau_{max} = \frac{Mz}{Jp} \cdot \rho_{max} = \frac{Mz}{\dfrac{Jp}{\rho_{max}}} = \frac{Mz}{Wp}$$

Tỷ số: $Wp = \dfrac{J_p}{\rho_{max}}$ gọi là mô men chống xoắn của mặt cắt ngang.

(Đơn vị Wp: cm^3, m^3, mm^3, ...).

Mặt cắt tròn: Jp = 0,1 θ^4 ; $\rho_{max} = R = \dfrac{D}{2}$

Vậy: $Wp = 0,2\ D^3$

5- Mặt cắt hợp lý:

Nhìn biểu đồ ứng suất tiếp hình 6-13 ta thấy: Tại chu vi mặt cắt vật liệu làm việc nhiều nhất (vì có τ_{max}) còn phía trong chịu lực ít dần. Tới tâm thì không chịu lực.

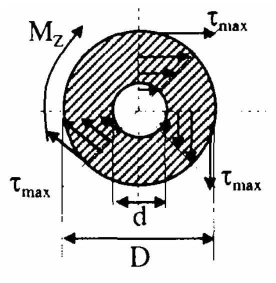
Người ít chuyển phần vật liệu phía trong ra ngoài để tăng cường khả năng chịu lực. Đó là dạng mặt cắt hình ống như hình 6- 14.

Với mặt cắt này $J_p = 0{,}1\ D^4\ (1 - \eta^4)$

$$\rho_{max} = \frac{D}{2}$$

Vậy: $W_p = 0{,}2\ D^3\ (1 - \eta^4)$

$$\eta = \frac{d}{D}$$



Hình 6-14

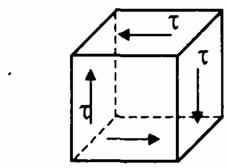
Dùng mặt cắt hình ống có 2 điều lợi:

- Nếu dùng cùng lượng vật liệu như nhau thì thanh mặt cắt hình ống chịu mômen xoắn khoẻ hơn thanh mặt cắt tròn đặc.

- Nếu cùng chịu mômen xoắn ngoại lực như nhau thì thanh mặt cắt hình ống tiết kiệm vật liệu hơn thanh mặt cắt tròn đặc.

5- Ứng suất trên mặt cắt xiên:

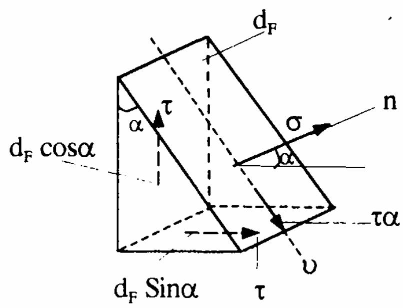
Đặt vấn đề: Ứng suất tiếp τ xác định theo công thức (6-7) có phải là ứng suất tiếp lớn nhất dùng để thiết kế được hay không?



Hình 6-15

Xét 1 phân tố vô cùng bé trong thanh tròn chịu xoắn. Phân tố đó chỉ có ứng suất tiếp τ tác dụng ở các mặt nên ở dạng trượt thuần tuý (hình 6-15).

Xét một mặt nghiêng có diện tích dF hợp với mặt cắt ngang của phân tố một góc α (hình 6- 16). Diện tích mặt đứng của phân tố là dFcosα, của mặt ngang là dFsinα. ΣV = 0 →.



Hình 6-16

$$\sum V = \tau_\alpha\ .\ dF + \tau\ (dF \sin\alpha)\ .\ \sin\alpha - \tau\ (dF\cos\alpha)\ .\ \cos\alpha - 0$$

$$\tau_\alpha = \tau\ (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

$$= \tau\ \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)$$

$$\boxed{\tau_\alpha = \tau\ .\ \cos 2\alpha} \qquad (6\text{-}8)$$

Với: $\alpha = 0\ \ (\cos 2\alpha = 1): \quad \tau_{max} = \tau$

Kết luận :

Mặt cắt ngang là mặt có ứng suất tiếp mà trị số có thể dùng để tính toán thiết kế.

6- Biến dạng xoắn.

Từ biểu thức: $\dfrac{d\varphi}{dz} = \dfrac{Mz}{GJp}$

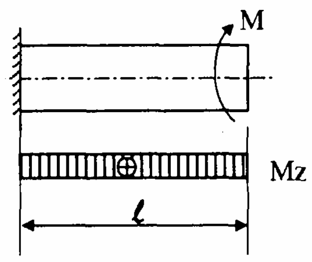
Suy ra: $d\varphi = \dfrac{Mz}{GJp} \cdot dz$

Góc xoắn tuyệt đối của thanh có chiều dài ℓ.

$$\boxed{\varphi = \int_0^{\ell} \frac{Mz}{GJp} dz} \qquad (6\text{-}9)$$

Xét 2 trường hợp đặc biệt:

a) <u>Thanh có Mz – const:</u> GJP = const



Hình 6-17

$$\boxed{\varphi = \frac{Mz}{GJp} \ell} \qquad (6\text{-}10)$$

b) Thanh có nhiều đoạn chiều dài ℓ_i.

Trong từng đoạn có M_{zi} = const; GJ_{pi} = const

$$\boxed{\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{Mz_i . \ell_i}{GJp_i}} \qquad (6\text{-}11)$$

<u>Chú ý</u>: Đơn vị góc xoắn φ là: Rad

7- Dạng phá hỏng của thanh tròn chịu xoắn.

Thực tế thường thấy hiện tượng: Khi xoắn thanh thẳng mặt cắt tròn.

+ Nếu vật liệu dòn: đường phá hỏng là đường xiên xoắn ốc. Tiếp tuyến của đường này với trục hợp với nhau một góc 45^o.

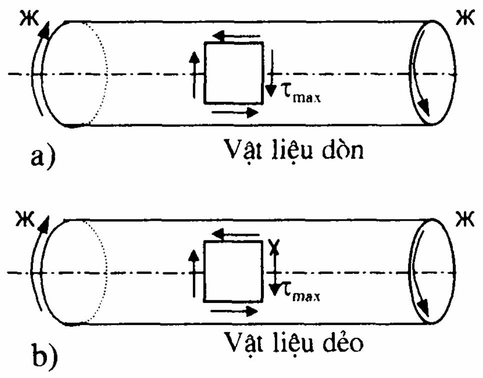
+ Nếu vật liệu dẻo: đường phá hỏng là đường trùng với mặt cắt ngang.

- Giải thích hiện tượng trên, ta dựa vào hai cơ sở:

+ Đặc trưng cơ học của vật liệu dòn và dẻo.

+ Phân tích trạng thái ứng suất của điểm nguy hiểm.

Thí nghiệm cho ta các đặc trưng cơ học:



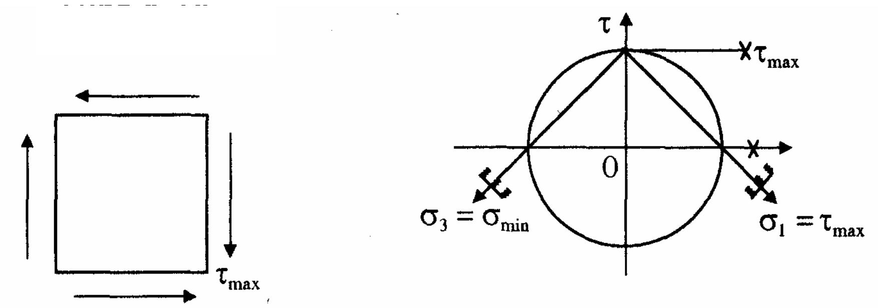
Hình 6-18

- Vật liệu dòn: $\sigma^K{}_b < \tau_b < \sigma_n{}^b$
- Vật liệu dẻo: $\tau_{ch} < \sigma^K{}_{bch} = \sigma^n{}_{bch}$

Khi xoắn ta thấy các phân tố ở mặt ngoài của thanh là phân tố nguy hiểm nhất. Chúng ở trạng thái ứng suất trượt thuần tuý (hình 6-18).

Vòng tròn Mo biểu diễn cho phân tố đó như hình (6- 19).

Ta có: $\sigma_{max} = \tau_{max}$; $|\sigma_{min}| = \tau_{max}$



Hình 6-19

Với vật liệu dòn: khi σ_{max} đã tới $\sigma_b{}^K$ thì cùng lúc đó σ_{max} chưa đạt tới τ_b và $|\sigma_{min}|$ chưa đạt tới $\sigma_b{}^K$. Nó sẽ bị phá hỏng do ứng suất chính kéo. $\sigma_{max} = \sigma_1$. Đường phá hỏng có phương vuông góc với σ_{max} tức là hợp với phương ngang một góc $\alpha = 45^0$.

Với vật liệu dẻo: Khi ứng suất tiếp τ_{max} đạt tới τ_{ch} thì cùng lúc đó σ_{max} và σ_{min} chưa đạt tới σ_{ch}. Sự phá hỏng là do các ứng suất τ_{max} nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục (mặt cắt ngang).

8- Điều kiện bền và cứng.

a) Điều kiện bền:

- Với vật liệu dòn: Vật liệu dòn bị phá hỏng do σ_{max} đạt tới $\sigma_b{}^K$.Vậy điều kiện bền là:

$$\sigma_{max} \le [\sigma]_K$$

Nhưng $$\sigma_{max} = \tau_{max} = \frac{Mz}{Wp}$$

Vậy: $$\boxed{\frac{Mz}{Wp} \le [\sigma]_K} \qquad (6\text{-}12)$$

- Với vật liệu dẻo: vật liệu dẻo bị phá hỏng do τ_{max} đạt tới τ_{ch}.Vậy điều kiện bền là:

$$\tau_{max} \leq [\tau]_K$$

hay: $$\boxed{\frac{Mz}{Wp} \leq [\tau]} \qquad (6\text{-}13)$$

$[\tau]$ được xác định bằng thí nghiệm hoặc tính theo thuyết bền.

Thuyết bền ứng suất tiếp: $[\tau] = \dfrac{[\sigma]}{2}$

Thuyết bền thế năng: $[\tau] = \dfrac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$

Thuyết bền Mo: $[\tau] = \dfrac{[\sigma]}{1+\alpha}$ $\quad (\alpha = \dfrac{\sigma_b^K}{\sigma_b^n})$

Trong cả hai trường hợp, với mặt cắt tròn rỗng.

$$Wp = 0{,}2\,D^3\,(\,1 - \eta^n\,) \qquad \eta = \frac{d}{D}$$

Mặt cắt tròn đặc: $\eta = 0$

b) Điều kiện cứng:

Là điều kiện sao cho: $\theta_{max} \leq [\theta]$ (6-14)

θ_{max} là góc xoắn tỷ đối lớn nhất tính được (đơn vị: Rad/m).

- $[\theta]$ là góc xoắn tỷ đối cho phép thường cho $[\theta]$ = Rad/m.

(nếu $[\theta]$ cho là θ^o/m thì đổi ra Rad/m với $360^o \approx 2\,\pi$ Rad)

- Trường hợp thanh chỉ có một mômen xoắn ngoại lực và tiết diện không đổi:

$$\theta_{max} = \frac{Mz}{GJp} \leq [\theta] \qquad (6\text{-}15)$$

Trường hợp thanh có nhiều đoạn, mỗi đoạn có nội lực Mz_i và độ cứng GJp_i khác nhau thì ta phải tính θ_i trong từng đoạn: $\theta_i = \dfrac{Mz_i}{GJp_i}$. Sau đó tìm ra θ_{max} để kiểm tra theo điều kiện cứng (6 - 14).

c) Các bài toán tính bền và cứng:

Từ (6-12); (6-l3); (6-14) ta có ba loại bài toán:

- Kiểm tra bền (hoặc kiểm tra cứng);

- Chọn tải trọng cho phép theo điều kiện bền (hoặc điều kiện cứng).

- Chọn tiết diện theo điều kiện bền (hoặc điều kiện cứng).

9- Ví dụ tính thanh tròn chịu xoắn thuần tuý.

Một trục truyền quay với số vòng n = 150 v/ph. Trục mang 4 puly (bánh 2 là bánh chủ động). Chứng nhận và truyền đi các công suất như hình 6-20a.

Kiểm tra bền và cứng cho trục nếu $[\tau] = 2000 N/cm^2$;

$d = 6$ cm ; $[\theta] = 0{,}4^o/m$

$G = 8.\ 10^6\ N/cm^2$

<u>Giải:</u>

Bước 1: Ngoại lực xoắn: $\text{Ж} = \dfrac{N}{\omega} = 9{,}55\ \dfrac{N}{n}$

$$\text{Ж}_1 = 9{,}55\ \frac{N_1}{n} = 9{,}55\ .\ \frac{4000}{150} = 254\ Nm$$

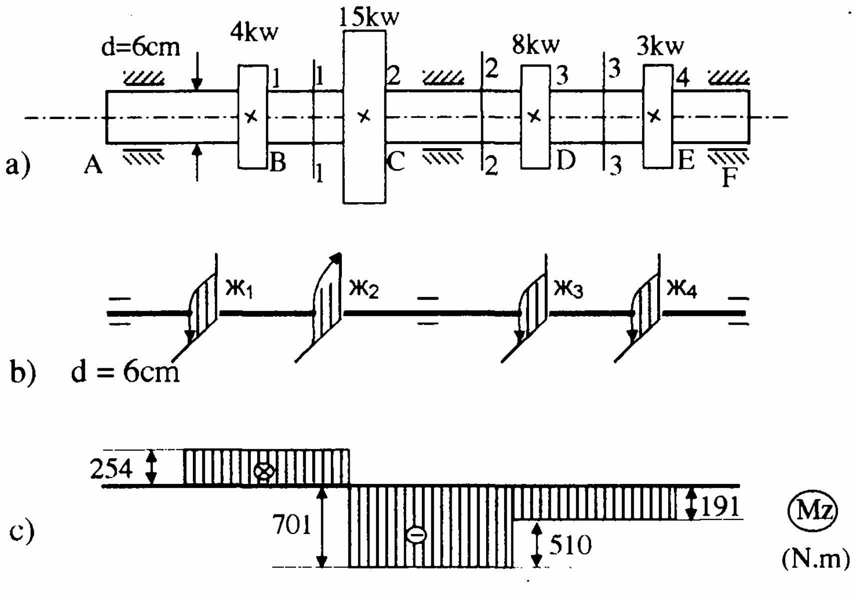
$$\text{Ж}_2 = 9{,}55\ \frac{N_2}{n} = 9{,}55\ .\ \frac{15000}{150} = 955\ Nm$$

$$\text{Ж}_3 = 9{,}55\ \frac{N_3}{n} = 9{,}55\ .\ \frac{8000}{150} = 510\ Nm$$

$$\text{Ж}_4 = 9{,}55\ \frac{N_4}{n} = 9{,}55\ .\ \frac{3000}{150} = 191\ Nm$$

Kiểm tra: Để trục cân bằng $\text{Ж}_2 = \text{Ж}_1 + \text{Ж}_3 + \text{Ж}_4$

Sơ đồ ngoại lực xoắn ở hình 6-20b.



Hình 6-20

Bước 2: Vẽ biểu đồ mômen xoắn nội lực.

Dùng 3 mặt cắt 1-1 ; 2-2; 3-3. Ta vẽ được biểu đồ mômen xoắn nội lực như hình 6-20c.

Bước 3: Xác định mặt cắt nguy hiểm.

Qua biểu đồ Mz ta thấy các mặt cắt thuộc đoạn CD là các mặt cắt nguy hiểm. Tại đây ta có:

$$Mz^{max} = 701\text{ Nm} = 701.10^{4}\text{ Ncm}$$

Bước 4: Điều kiện bền.

$$\tau_{max} = \frac{Mz^{max}}{Wp} \leq [\tau]$$

$$\tau_{max} = \frac{Mz^{max}}{0{,}2d^{3}} = \frac{7{,}01.10^{4}}{0{,}2.6^{3}} = 1625\text{ N/cm}^{2}$$

$\tau_{max} < [\tau] = 2000\text{ N/cm}^{2}$. Vậy trục đảm bảo điều kiện bền.

Bước 5: Điều kiện cứng.

$$\theta_{max} = \frac{Mz^{max}}{GJp} \leq [\theta]$$

$$\theta_{max} = \frac{Mz^{max}}{G.0{,}1d^{4}} = \frac{7{,}01.10^{4}}{8.10^{6}.0{,}1.6^{4}} = 6{,}78\ .\ 10^{-5}\text{ Rad/cm}$$

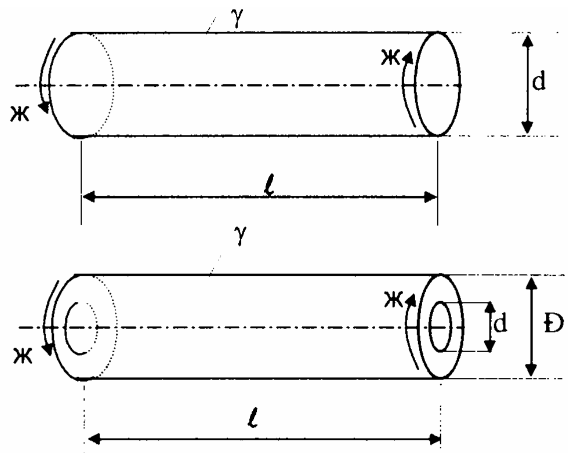
$$\theta_{max} = 6{,}78\ .\ 10^{-3}\text{ Rad/m}$$

$$[\theta] = 0{,}4\ \text{Đ}^{o}\text{/m} = \frac{2\pi.0{,}4}{360}\text{ Rad/m}$$

vậy: $[\theta] = 7.10^{-3}\text{ Rad/m}$

$\theta_{max} < [\theta]$. Vậy trục đảm bảo điều kiện cứng.

<u>*Ví dụ 2:*</u>



Hình 6-21

Một trục đặc và trục rỗng có trọng lượng bằng nhau và chịu cùng một mômen xoắn (hình 6-21). Trục rỗng có đường kính trong bằng 70% đường kính ngoài.

Hãy so sánh ứng suất tiếp lớn nhất trên hai trục?

Giải:

Trọng lượng trục đặc: $Q_d = \frac{\pi d_o^2}{4}.\ell.\gamma$

Trọng lượng trục rỗng: $Q_d = (\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}.\ell.\gamma$

γ là trọng lượng riêng của hai trục.

Từ điều kiện $Q_d = Q_n$;

Suy ra: $\frac{\pi d_o^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}$ hay: $d_o^2 = D^2 - d^2$

$$d_o^2 = D^2 (1 - \eta^2)$$

Trong đó: $\eta = \frac{d}{D} = 70\ \% = 0,7$

Suy ra: $d_o = D \,.\, \sqrt{1-\eta^2} = D\sqrt{1-0,7^2} = 0,71\ D$

$$\tau_{max}^d = \frac{Mz}{0,2d_o^3} = \frac{ж}{0,2d_o^3} = \frac{ж}{0,2(0,71D)^3} = \frac{ж}{0,2.0,36D^3}$$

$$\tau_{max}^n = \frac{Mz}{0,2D^3(1-\eta^4)} = \frac{ж}{0,2D^3(1-\eta^4)}$$

$$= \frac{ж}{0,2D^3(1-0,7^4)} = \frac{ж}{0,2D.0,76D^3}$$

$$\frac{\tau_{max}^d}{\tau_{max}^n} = \frac{0,76}{0,36} = 2,1$$

Kết luận:

Với cùng một lượng vật liệu, ứng suất tiếp cực đại ở trục đặc lớn gấp 2,1 ở trục rỗng, tức là mau bị phá hỏng hơn trục rỗng.

§3- TÍNH LÒ XO XOẮN ỐC HÌNH TRỤ CÓ BƯỚC NGẮN

Trong thực tế ta hay gặp nhiều lò xo xoắn ốc hình trụ để giảm chấn như ở các phương tiện giao thông, máy, động cơ điện, chúng thường ở dạng chịu kéo (nén) liên tục.

Cho một lò xo xoắn ốc hình trụ chịu lực kéo đúng tâm (hình 6-22).

Các thông số của lò xo:

D : đường kính trung bình của ống lò xo hình trụ.

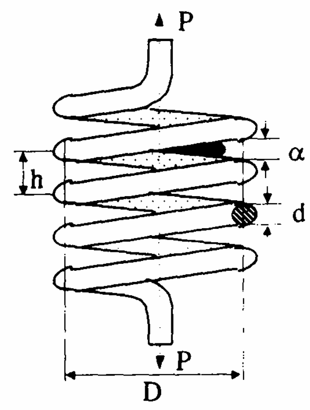
d: đường kính của dây lò xo.

n : số vòng quấn của lò xo.

h : bước quấn của lò xo.

α: góc nghiêng của vòng lò xo.

Phạm vi nghiên cứu của ta là: các lò xo hình trụ có bước ngắn (tức là các vòng quấn sát nhau). Các lò xo có D = (5÷10)d.

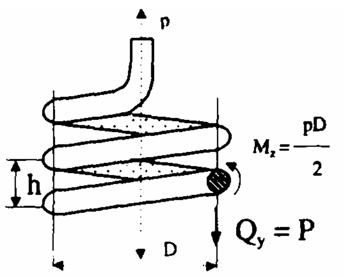


Hình 6.22

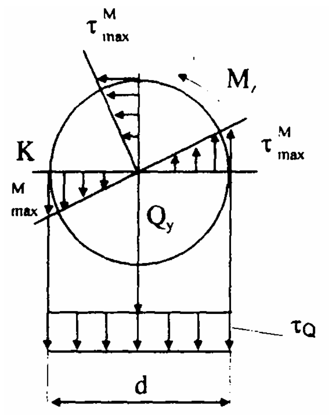
1- Nội lực:

Tưởng tượng dùng một mặt cắt qua trục của ống lò xo chia lò xo làm hai phần và khảo sát một trong hai phần đó (hình 6-23).

Vì bước của lò xo là ngắn nên góc nghiêng α của vòng lò xo rất nhỏ tức là ta có thể coi các vòng lò xo cuốn như nằm ngang. Do đó mặt cắt lò xo một cách gần đúng có thể coi như tròn.



Hình 6.23



Hình 6.24

Để phần khảo sát (hình 6-23) được cân bằng ta có nội lực trên mặt cắt lò xo:

Lực cắt: $Qy = P$

Mô men xoắn : $Ж_2 = P.\frac{D}{2}$

2. Ứng suất.

Lực cắt Q_y và mômen xoắn Mz đều gây nên ứng suất tiếp ứng suất tiếp do lực cắt trong lò xo 1 cách gần đúng có thể coi như phân bổ đều theo chiều Q_y. Tức là :

$$\tau_Q = \frac{Q_y}{F} = \frac{P}{F} = \frac{4.P}{\pi d^2}$$

- Ứng suất tiếp do mômen xoắn nội lực có giá trị cực đại δ’ chu vi mặt

$$\tau_{max}^{M} = \frac{Mz}{Wp} = \frac{\frac{P.D}{2}}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{8PD}{\pi d^3}$$

Biểu đồ phân bố τ_Q và τ_M chỉ trên hình 6-24.

Trên mặt cắt ta thấy điểm K là điểm nguy hiểm vì δ' đây τ_{max}^{M} và τ_Q cùng chiều. Ứng suất tổng cộng:

$$\tau_{max} = \tau_K = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{8PD}{\pi d^3} = \frac{8PD}{\pi d^3}\left(\frac{d}{2D} + 1 \right)$$

Như trên đã nói vì ta xét loại lò xo có D = (5 ÷ 10) d nên tỷ số $\frac{d}{2D}$ là rất nhỏ so với 1 nên ta có thể bỏ qua.

Mặt cắt gần đúng ta có:

$$\tau_{max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \qquad (6\text{-}16)$$

Ta nhận thấy công thức (6-16) là công thức gần đúng bỏ qua ảnh hướng góc nghiêng của lò xo và bỏ qua τ_Q.

Để bù vào 2 sai số trên người ta dùng công thức chính xác.

$$\boxed{\tau_{max} = K \cdot \frac{8PD}{\pi d^3}} \qquad (6\text{-}17)$$

K: là hệ số điều chỉnh xác định bằng thực nghiệm:

$$K = \frac{m + 0,25}{m - 1} \qquad (6\text{-}18)$$

$$m = \frac{D}{d} \text{ (đơn vị } \tau_{max} : N/cm^2 ,\ \ N/m^2 , \ldots)$$

3- Biến dạng:

Gọi λ là độ dãn (hay co) của lò xo. Khi lò xo chịu kéo (nén) đúng tâm bởi lực P nó sẽ tích luỹ một năng lượng, dưới dạng thế năng biến dạng đàn hồi U.

Người ta đã chứng minh, với một thanh tròn chịu xoắn nó tích luỹ một thế năng biến dạng đàn hồi :

$$U = \frac{M_z^2 . \ell}{2GJp} \qquad (6\text{-}19)$$

Dây lò xo có thể coi như 1 thanh tròn chịu xoắn bởi mômen xoắn Mz = $\frac{PD}{2}$,

chiều dài ℓ = π. D. n (n là số vòng quấn của dây lò xo) $Jp = \frac{\pi d^4}{32}$

Thay các đại lượng trên vào (6- 19) ta có:

$$U = \frac{4P^2D^3n}{Gd^4} \qquad (6\text{-}20)$$

Mặt khác ta thấy khi lực P chuyển dời trên biến dạng λ của lò xo nó sẽ sinh công biến dạng A

$$A = \frac{P.\lambda}{2} \qquad (6\text{-}21)$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng: A = U

nên: $$\frac{P.\lambda}{2} = \frac{4P^2D^3n}{Gd^4}$$

Suy ra: $$\boxed{\lambda = \frac{8PD^3.n}{Gd^4}} \qquad (6\text{-}22)$$

hay: $$\boxed{\lambda = \frac{P}{C}} \qquad (6\text{-}23)$$

(đơn vị của λ: m, cm,...)

C: gọi là độ cứng của lò xo.

$$C = \frac{Gd^4}{8D^3n} \qquad (6\text{-}24)$$

Vì: $C = \frac{P}{\lambda}$ nên đơn vị của C là: N/cm ; N/m,...

4- Điều kiện bền và cứng:

Điều kiện bền: $$\tau_{max} = K \cdot \frac{8PD}{\pi d^3} \le [\tau] \qquad (6\text{-}25)$$

Điều kiện cứng: $$\lambda = \frac{8pD^3n}{Gd^4} \le [\lambda] \qquad (6\text{-}26)$$

Từ (6-25) và (6-26) ta thường gặp 3 dạng bài toán:

Dạng 1 : kiểm tra bền (cứng).

Dạng 2: Chọn tải trọng cho phép P theo điều kiện bền (cứng).

Dạng 3: Chọn tiết diện theo điều kiện bền (cứng).

§4- XOẮN THANH MẶT CẮT CHỮ NHẬT

Khi xoắn thanh mặt cắt chữ nhật ta thấy mặt cắt ngang của thanh không còn phẳng mà bị vênh đi (hình 6-25). Mọi giả thuyết dùng để tính cho thanh mặt cắt tròn đây không dùng được.

1- Ứng suất:

Bằng môn học lý thuyết đàn hồi người ta chứng minh được:

- Ứng suất tiếp cực đại, trên trung điểm cạnh dài (hình 6-26).

$$\tau_{max} = \tau_E = \tau_F = \frac{M_z}{W_{xoắn}} \qquad (6\text{-}27)$$

$W_{xoắn} = \alpha$ a. b^2 (mômen chống xoắn) α là hệ số phụ thuộc tử số $\frac{a}{b}$ (a là cạnh dài, b là cạnh ngắn).

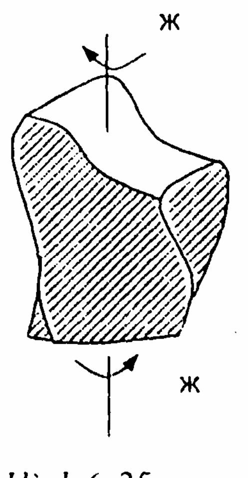
- Ứng suất tiếp trên trung điểm cạnh ngắn:

$$\tau_1 = \tau_G = \tau_H = \gamma\ \tau_{max} \qquad (6\text{-}28)$$

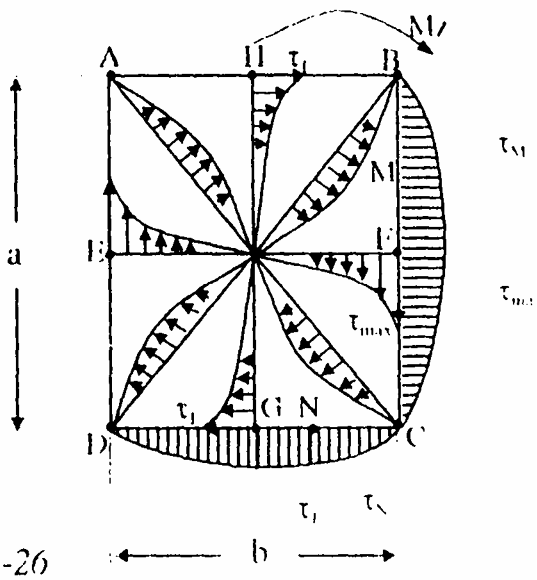
γ là hệ số phụ thuộc tỷ số $\frac{a}{b}$.

- Ứng suất tiếp tại các điểm góc: $\tau_A = \tau_B = \tau_C = \tau_D = 0$

Biểu đồ chỉ rõ sự phân bố ứng suất tiếp trên hình 6-26.



Hình 6-25



Hình 6-26

2- Biến dạng:

Lý thuyết đàn hồi cũng chứng minh được:

Góc xoắn tỷ đối: $\theta = \dfrac{Mz}{GJ_{max}}$ (6-29)

$J_{xoắn} = \beta .\ ab^3$; β là hệ số phụ thuộc tỷ số $\dfrac{a}{b}$

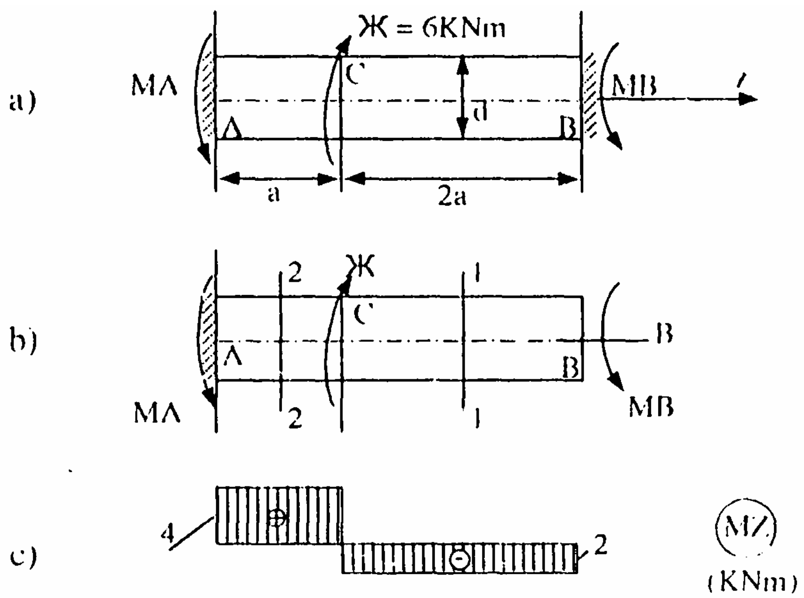
Bảng hệ số α, β, γ.

$\frac{a}{b}$ / Hệ số	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	>10
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

§5- BÀI TOÁN SIÊU TĨNH KHI XOẮN.

Cũng tương tự như chương kéo nén, trong chương này ta cùng gặp những bài toán xoắn trong đó ẩn số cần tìm nhiều hơn số phương trình cân bằng tĩnh có thể thành lập được. Những bài đó gọi là bài toán siêu tĩnh. Dưới đây ta xét một số dạng điển hình.

Ví dụ 1 :



Hình 6-27

Vẽ biểu đồ mômen xoắn nội lực cho thanh chịu xoắn như hình 6-27a.

Giải:

1) Xác định phản lực liên kết:

Trên hình 6-27a ta giả thiết trước chiều của phản lực liên kết MA và MB. Lấy mômen đối với trục thanh:

$$\sum m_z = 0$$

Hay $$MA + MB - Ж = 0 \qquad (1)$$

Phương trình (1) có hai ẩn là MA và MB nên không giải được. Bài toán siêu tĩnh này chỉ có thể giải nếu ta lập được thêm một phương trình biến dạng.

Để tìm MA và MB ta 1àm như sau :

Chuyển hệ siêu tĩnh (a) đã cho thành hệ tĩnh định tương đương (b) bằng cách tháo bỏ ngàm B.

So sánh 2 hệ (a) và (b) ta thấy:

- Hệ (a) và (b) tương đương với nhau về các ngoại lực tác dụng lên nó (chỉ có điểm khác là MB ở hệ (a) là phân lực liên kết còn ở hệ (b) là tải trọng như tải trọng Ж.

- Ngàm B của hệ (a) không thể xoay được còn mặt cắt B của (b) lại có thể xoay.

Vậy để hệ (a) và (b) tương đương với nhau cả biến dạng thì ta phải thêm vào một điều kiện là góc xoay của mặt cắt B của hệ (b) phải bằng không.

Tức là $$\varphi_B^{(b)} = 0$$

Hay $$\varphi_{AB} = 0 \qquad (2)$$

(biến dạng của toàn thanh AB ở phương trình (2) gọi là phương trình biến dạng).

Nhưng $$\varphi_{AB} = \varphi_{AC} + \varphi_{CB} = 0$$

Hay $$\frac{M_{z1}.\ell_1}{GJp} + \frac{M_{z2}.\ell_2}{GJp} = 0 \qquad (2')$$

Xét mặt cắt 1-1 và 2-2 của hệ hình 6-27b ta có:

$$M_{Z1} = -MB \quad ; \quad M_{Z2} = Ж - MB$$

Thay M_{Z1} và M_{z2} vào (2') ta có:

$$-\frac{MB.2a}{GJp} + \frac{(Ж - M_B)\,a}{GJp} = 0$$

Đơn giản 2 vế: $$-2MB + Ж - MB = 0 \qquad (3)$$

Từ (3) giải được : $$MB = \frac{Ж}{3} = 2KNm.$$

Thay giá trị MB vào (1) ta giải được: $MA = \frac{2}{3}Ж = 4$ KNm

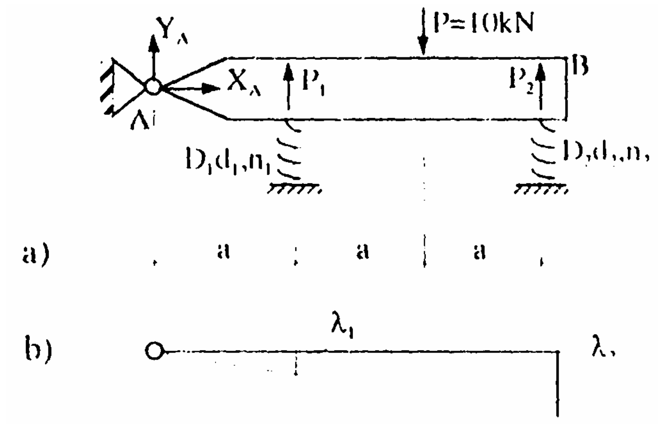
2- Vẽ biểu đồ mômen xoắn nội lực Mz:

$$Mz_1 = -\,MB \quad = -\,2\ kNm$$
$$Mz_2 = \text{Ж} - MB = 6 - 2 = 4kNm$$

Biểu đồ Mz được vẽ trên hình 6-27c.

Đến đây mọi quá trình giải giống hoàn toàn hệ tĩnh định.

Ví dụ 2:



Hình 6-28

Xác định lực nén tác dụng vào lò xo 1 và 2 (hình 6-28a) nếu cho

D_1 = 10cm; d_1 = 1cm ; n_1 = 8 cm

D_2 = l4cm; d_2 = l,2cm ; n_2 = 10 cm

G = 8. 10^6 N/cm^2

Xem r dầm AB tuyệt đối cứng.

<u>Giải:</u>

Phản lực tác dụng vào dầm AB: Y_A, X_A, P_1, P_2 như hình vẽ.

Lấy mômen của các lực với điểm A.

$$\sum MA = 0$$
$$\text{Hay} \quad P_1.\,a + P_2.\,3a - P.2a = 0$$
$$\text{Hay} \qquad P_1 + 3P_2 - P = 0 \qquad (1)$$

Phương trình (1) có (2) ẩn nên không giải được. Đó là bài toán siêu tĩnh. Ta phải tìm thêm 1 phương trình biến dạng.

Dựa vào điều kiện dầm AB là tuyệt đối cứng nên khi có lực P tác dụng biến dạng λ_1 và λ_2 của hai lò xo có tỷ lệ với nhau (hình 6-28b).

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3} \qquad (3)$$

Phương trình (2) là phương trình biến dạng cần tìm.

Từ (2) có thể viết:

$$3\lambda_1 = \lambda_2$$

Hay: $$3\,\frac{8P_1.D_1^3.n_1}{G.d_1^4} = \frac{8P_2.D_2^3.n_2}{G.d_2^4}$$

Hay: $$\frac{3P_1.D_1^3.n_1}{d_1^4} = \frac{P_2.D_2^3.n_2}{d_2^4}$$

$$\frac{3P_1.10^3.8}{1^4} = \frac{P_2.14^3.10}{1{,}2^4}$$

Suy ra: $P_2 = 2{,}62\ P_1$ (a)

Thay (a) vào (1) có: $P_1 + 3\ (2.62\ P_1) = P = 0$

Giải được: $P_1 + 0{,}113\ P = 1{,}13$ kN.

$P_2 = 2{,}62\ (0{,}773P) = 0{,}296P = 2{,}76$ kN.

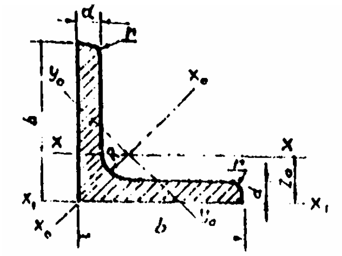
Lực tác dụng vào hai lò xo 1 và 2 là:

$P_1 = 1{,}13$ kN; $P_2 = 2{,}96$ kN.

Hai lực này có chiều ngược với hai lực tác dụng vào dầm. Sau khi giải được P_1, P_2 quá trình giải tiếp theo giống hoàn toàn bài toán tĩnh định trước đây.

PHỤC LỤC

Quy cách thép cân thép gốc đều cạnh ГОСТ 8509-57

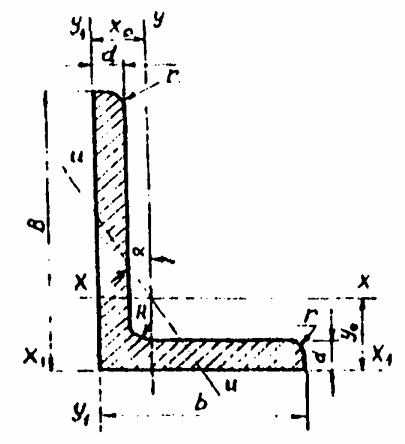


Bảng 1

Số hiệu thép hình N^o	Kích thước mm				Diện tích mặt cắt F (cm^2)	Trọng lượng km dài (kG)	Các trị số đối với trục							(cm)
	b	d	R	r			x - x		x0 – x0		y0 – y0		x1–x1	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
		4			1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,61
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,76
		4			1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
2,8	28	3	4	1,3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
		4			2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
3,6	36	3	4,5	1,5	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4			2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04
4	40	3	5	1,7	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4			3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
4,5	45	3	5	1,7	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4			3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
		5			4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
5	50	3	5,5	1,8	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4			3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5			4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	3,5	6	2	3,86	3,03	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
		4			4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5			5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,4	1,57
6,3	63	4	7	2,3	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5			6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6			7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5			6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6			8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7			9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8			10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
7,5	75	5	9	3	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6			8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7			10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8			11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9			12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	80	5,5	9	3	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6			9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
		7			10,8	8,51	65,3	2,45	104	27,0	27,0	1,58	119	2,23
		8			12,3	9,65	73,4	2,44	116	30,3	30,3	1,57	137	2,27
9	90	6	10	3,3	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7			12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8			13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9			15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
10	100	6,5	12	4	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7			13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8			15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10			19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	71,1	1,96	333	2,83
		12			22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14			26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16			29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06
11	110	7	12	4	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8			17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
12	125	8	14	4,6	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9			22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10			24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12			28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14			33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16			37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	9	14	4,6	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10			27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12			32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
16	160	10	16	5,3	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11			34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12			37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14			43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16			49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18			54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20			60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
18	180	11	16	5,3	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12			42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,80
20	200	12	18	6	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13			50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14			54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16			62,0	48,7	2363	6,77	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20			76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25			94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30			115,5	87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
22	220	14	21	7	6,04	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16			68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
25	250	16	24	8	78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18			87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20			97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10101	6,91
		22			106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25			119,7	94,0	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28			133,1	104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30			142,0	111,4	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,80	15753	7,31

Thép góc không đều cạnh ГОСТ 8510-57

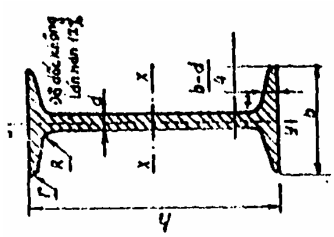


Bảng 2

	Kích thước (mm)							Các trị số đối với trục										
	B	b	d	R	r													
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,91	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,47	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382
			4			1,94	1,52	1,93	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,384
4,2/5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385
			4			2,47	2,47	3,93	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	1,68	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382
			4			2,80	2,20	5,68	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	24,2	1,90	6,17	1,60	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403
			4			3,17	2,49	7,98	1,59	2,56	0,90	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401
5,6/3,6	56	36	3,5	6,0	2,0	3,16	2,48	10,1	1,79	3,30	1,02	20,3	1,80	5,43	0,82	0,95	0,79	0,407
			4			3,58	2,81	11,4	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406
			5			4,41	3,46	13,8	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404
6,3/4,0	63	40	4	7,0	2,3	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
			5			4,98	3,91	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,73	0,86	0,396
			6			5,90	4,63	23,2	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393
			8			7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,386
7/4,5	70	45	4,5	7,5	2,5	5,07	3,98	25,3	2,23	8,25	1,28	51	2,25	13,6	1,03	4,88	0,98	0,407
			5			5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406
7,5/5	75	50	5	8	2,7	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436
			6			7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
			8			9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430
8/5	80	50	5	8	2,7	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,6	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
			6			7,55	5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386
9,5/6	90	56	5,5	9	3	7,86	6,17	65,3	2,38	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384
			6			8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384
			8			11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380
10/6,3	100	63	6	10	3,2	9,59	7,53	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
			7			11,1	8,70	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
			8			12,6	9,87	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
			10			15,5	12,1	154	3,15	17,1	1,75	333	3,40	85,8	1,50	128,3	1,35	0,387
11/7	110	70	6,5	10	3,3	11,4	8,98	142	3,53	45,6	2,00	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
			7			12,3	9,64	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,60	28,8	1,53	0,402
			8			13,9	10,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400

12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,1	11,0	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407
			8			16,0	12,5	256	4,00	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
			10			19,7	15,5	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
			12			23,4	28,3	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2,00	69,5	1,72	0,400
14/9	140	90	8	12	4	18,0	14,1	364	4,49	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
			10			22,2	17,5	444	4,47	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409
16/10	160	100	9	13	4,3	22,9	18,0	606	5,15	186	2,85	1221	5,19	300	2,23	110	2,2	0,391
			10			25,3	19,8	667	5,13	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390
			12			30,0	23,6	784	5,11	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388
			14			34,7	27,3	897	5,08	272	2,80	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385
18/11	180	110	10	14	4,7	28,3	22,2	952	5,8	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375
			12			33,7	26,4	1123	5,77	324	3,1	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374
20/12,5	200	125	11	14	4,7	34,9	27,4	1449	6,45	446	3,58	2920	6,5	718	2,79	264	2,75	0,392
			12			37,9	29,7	1568	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392
			14			43,9	34,4	1801	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390
			16			49,8	39,1	2026	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388
25/16	250	160	12	18	6	48,3	37,9	3147	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410
			16			63,6	49,6	4091	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408
			18			71,1	55,8	4545	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	2,49	0,407
			20			78,5	61,7	4987	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405

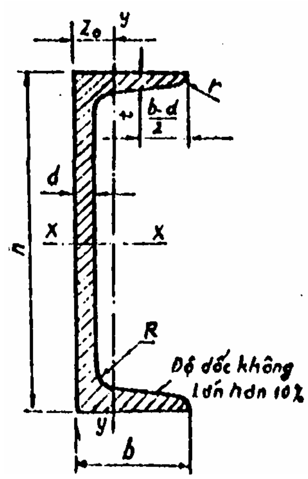
Thép chữ I ГОСТ 8239 - 56



Bảng 3

Số hiệu thép hình Nº	Trọng lượng 1m dài (kG)	Kích thước (mm)						Diện tích mặt cắt (cm2)	Các trị số đối với trục						
		h	b	d	t	R	r		x-x				y - y		
									I_x (cm^3)	W_x (cm^3)	i_x (cm)	S_x (cm^3)	I_y (cm^4)	W_y (cm^3)	i_y (cm)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21,0	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	22,7	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,32
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	3800	317	10,1	179	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	5010	371	11,2	210	260	42,5	2,54
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	5500	507	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	56,1	400	155	8,0	13,0	15,0	6,0	71,4	18930	947	16,3	540	666	85,9	3,05
45	65,2	450	160	8,6	14,2	16,0	7,0	83,0	27450	1220	18,2	699	807	101	3,12
50	76,8	500	170	9,5	15,2	17,0	7,0	97,8	39290	1570	20,2	905	1040	122	3,26
55	89,8	550	180	10,3	16,5	18,0	7,0	114	55150	2000	22,0	1150	1350	150	3,44
60	104	600	190	11,1	17,8	20,0	8,0	132	75450	2510	23,9	1450	1720	181	3,60
65	120	650	200	12,0	19,2	22,0	9,0	153	101400	3120	25,8	1800	2170	217	3,77
70	138	700	210	13,0	20,8	24,0	10,0	176	134600	3840	27,7	2230	2730	260	3,94
70a	158	700	210	15,0	24,0	24,0	10,0	202	152700	4360	27,5	2550	3240	309	4,01
70b	184	700	210	17,5	28,2	24,0	10,0	234	175370	5010	27,4	2940	3910	373	4,09

Thép chữ U ГОСТ 8240 - 56



Bảng 4

		Kích thước (mm)							Các trị số đối với trục							
		h	b	d	t	R	r		x-x				x-y			
5	4,34	50	32	4,4	7,0	6	2,5	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,46
6.5	5,90	65	36	4,4	7,2	6	2,5	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	124
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7	3,0	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8	3,0	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	8	3,0	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	9	3,5	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21,0	220	82	5,4	9,5	10	4,0	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	10	4,0	8,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,16
24	24,0	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	316	2,60	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	11	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,5	12	5,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	13	5,0	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6,0	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6,0	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

MỤC LỤC

Trang